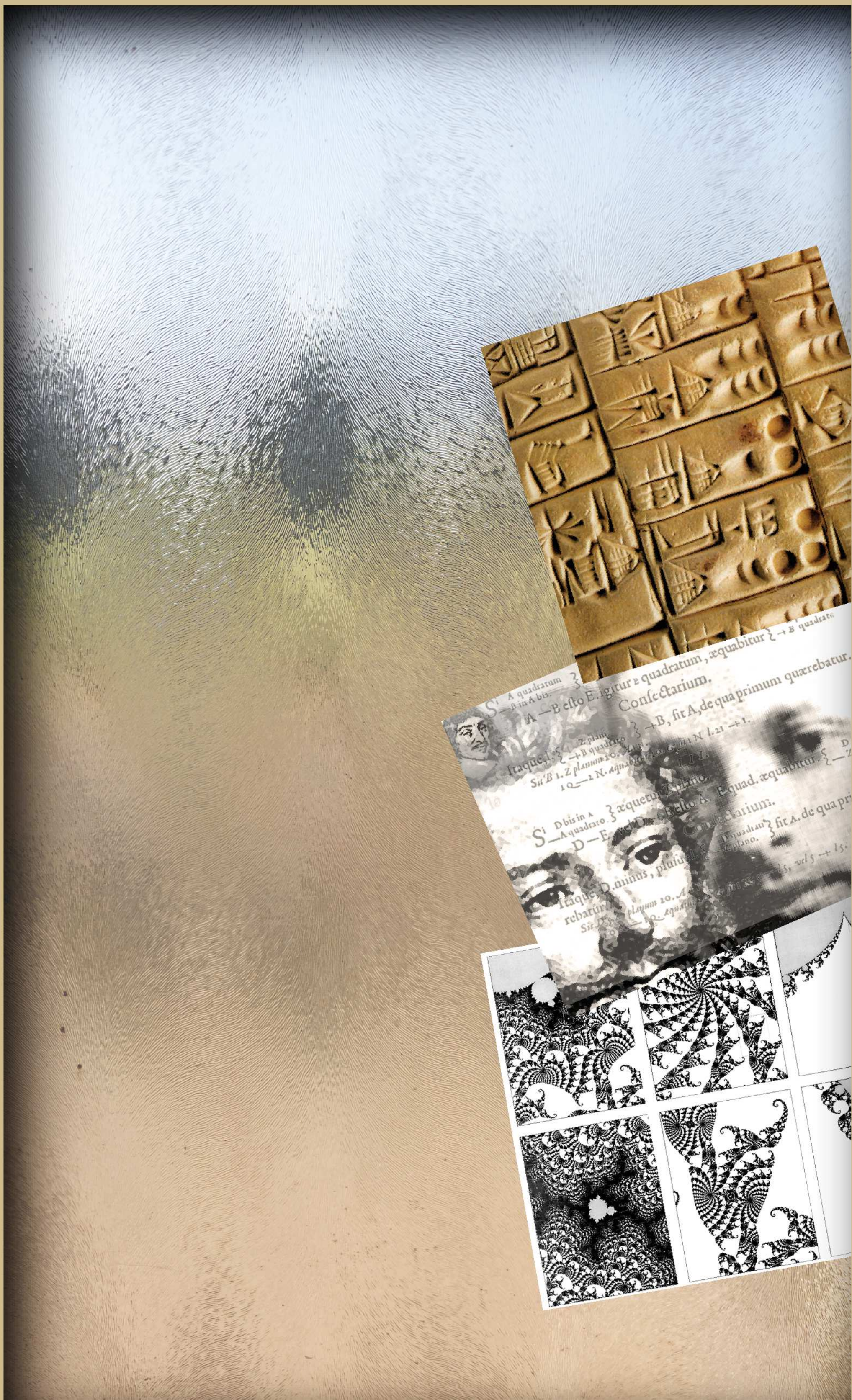
L'Autan moderne

Bulletin de l'Institut de Recherche pour l'Enseignement des Sciences de Toulouse



n° 2 - janvier 2018

Membres du Conseil d'Administration de l'IRES

Année 2017 - 2018

• Directeur IRES

Xavier BUFF

Directeurs-Adjoints IRES

André ANTIBI   Pierre ETTINGER   Claude MATTIUSSI

• Animateurs IRES

Jean-Luc ACED   Christophe BILLY
Brigitte CHAPUT   Katia FAJERWERG
Philippe HUBERT   Hamid HADIDOU
Hussein HAMMOUD   Anne HERMABESSIERE
Dominique LARROUY   Florence LARUE
Isabelle LAURENCOT-SORGIUS   Jérôme LOUBATIERES
Renaud MATHEVET   Bertrand TOQUEC

• Rectorat

Danielle BLAU
Carol DARRAULT
Bernard FRESSIGNAC
Gilles LERAN
Yan SERRA
Armelle VIALA

• Directeur FSI

Serge COHEN

• Directeurs de département FSI

Claire BATSERE (Langues vivantes et Gestion)
Jean-Pascal CAMBRONNE (EEA)
Christel CAUSSERAND (Chimie)
Jean-François FERRERO (Mécanique)
Aurélien GARIVIER (Mathématiques)
Philippe (UPSSITECH)
Christel LUTZ (Biologie et Géosciences)
Dominique TOUBLANC (Physique)

Bulletin de l'Institut de Recherche pour l'enseignement des Sciences de Toulouse

IRES UFR FSI
Université Toulouse 3
Paul Sabatier
31062 TOULOUSE cedex 9
ires@univ-tlse3.fr

2

L’Autan moderne
Janvier 2018

ISBN : 978-2-918013-09-9
EAN : 9782918013099

Table des matières

Notes aux auteurs

Pour assurer l'uniformité de la mise en page et la présentation, l'article doit être écrit en :

Police : Arial

Taille : 12

Interligne : entre 1 et 1,5

Marges haut, bas et droite : 3 cm

Marge à gauche : 3,5 cm

Gros titre : taille 18

Sous-titre : taille 16

Mentionner en tête de l'article la liste de tous les auteurs, ainsi que l'institution de rattachement, avec si possible, une adresse électronique de l'un des auteurs.

L'article doit être proposé en traitement de texte compatible Word (afin de faciliter la mise en page, éviter Latex …). Fournir également une version en fichier pdf. La nécessité de la mise en page peut amener les coordonateurs à modifier la présentation.

L'article doit comporter entre une et une vingtaine de pages y compris les annexes. Chaque article doit être précédé d'un résumé d'une dizaine lignes au maximum et de quelques mots clés. Il faut envoyer les articles à

hussein.hammoud@ac-toulouse.fr

Conformément aux règles éditoriales, l'auteur reste le seul responsable du contenu de son l'article et des idées qu'il expose.

LEV SÉMIONOVITCH VYGOTSKI

Groupe Pédagogie Collège
IRES DE TOULOUSE (https://gpc-maths.org)

Résumé
Dans cet article, il s'agit de présenter très brièvement quelques notions essentielles de l'œuvre de Vygotski, psychologue de l'apprentissage et du développement.

Mots-clés
Vygotski, culture, conception historico-socio-culturelle, apprentissage, développement, outil, signe.

Quelques repères biographiques

Vygotski est né à Orsha, près de Gomel, en Biélorussie en 1896. Après de brillantes études universitaires, il revient à Gomel où il exerce des activités d'enseignement auprès de futurs enseignants et diverses activités culturelles (philosophie, critique littéraire, théâtre, etc.). Il y fonde un laboratoire et réalise ses premières expériences en psychologie. À la suite de son intervention remarquée au IIe Congrès panrusse de psycho-neurologie, en 1924, il est engagé comme chercheur à l'Institut psychologique de Moscou où il travaillera jusqu'à sa mort en 1934.

Pendant ces dix ans, il déploiera une activité intense : recherches, conférences, direction de thèses, voyages. En 1925, il crée un laboratoire de psychologie pour l'enfance anormale qui deviendra par la suite l'Institut de défectologie dont il sera le premier directeur. En 1926, il engage avec ses collaborateurs un vaste travail expérimental et théorique. Mais Vygotski n'a pas encore élaboré les concepts fondamentaux du modèle historico-socio-

culturelle du psychisme. Ce n'est que vers 1930, après une gestation de quelques années, que Vygotski et ses collaborateurs formuleront cette théorie. De 1930 jusqu'à sa mort, Vygotski va poursuivre ses recherches et y ajouter un intense travail de publication pour y présenter sa théorie historico-socio-culturelle. En 1934, il propose une synthèse de dix années de travail ininterrompu qui sera son œuvre majeure : *Pensée et langage*. Il en dicte le dernier chapitre sur son lit de mort.
Dès 1936, l'œuvre de Vygotski est censurée. Ce n'est qu'en 1956 que paraît à nouveau *Pensée et langage* en russe. En 1962, un digest est publié aux Etats-Unis. Curieusement, la première traduction en français de *Pensée et langage* ne paraîtra qu'en 1985.

Le modèle historico-socio-culturel de Vygotski

En environ dix ans de travail scientifique, Vygotski a développé une conception radicalement neuve du psychisme humain, la conception historico-socio-culturelle. On peut l'énoncer schématiquement ainsi :
À la différence des fonctions élémentaires que nous avons en commun avec les vertébrés supérieurs, nos fonctions psychiques les plus élevées, celles qui permettent, entre autres, la maîtrise du comportement (comme l'attention volontaire, la mémoire volontaire, la pensée abstraite, la formation des concepts, la libre volonté…) ne résultent pas de capacités natives. Elles résultent de l'appropriation d'acquis socio-historiques, objets d'un monde culturel (les oeuvres de la culture, au sens large) dont les éléments de base sont l'outil et le signe. Par signe ou plutôt par instrument psychologique, Vygotski entend le langage, les diverses formes de comptage et de calcul, les moyens mnémotechniques, les symboles algébriques, les oeuvres d'art, l'écriture, les schémas, les diagrammes, les cartes, les plans, etc. Par cette appropriation, se développent chez les individus des activités et une personnalité foncièrement irréductibles à leurs conditions naturelles. Avec le développement culturel apparaît donc du qualitativement nouveau.
Autrement dit, existent chez l'enfant deux lignes de développement dialectiquement intriquées : une ligne naturelle et une ligne culturelle. Ainsi l'enfant hérite d'une organisation biologique, comme être de nature, et il se construit, en tant qu'être de culture, en s'appropriant les productions humaines léguées par les générations antérieures. Cette appropriation culturelle n'est possible que par la médiation d'outils psychologiques qui, à l'instar des outils

techniques qui permettent à l'homme de transformer la nature, lui permettent à la fois d'agir sur le comportement d'autrui mais aussi sur le sien propre. Et c'est cette appropriation culturelle médiatisée par des outils psychologiques qui rend possible le développement des fonctions psychiques supérieures.

<u>Une loi du développement : de l'inter-psychique à l'intra-psychique</u>

Mais comment cette appropriation culturelle est-elle possible ?
Vygotski nous propose un exemple, celui d'un enfant cherchant désespérément un jouet. L'adulte intervient et le questionne : l'avais-tu à tel endroit ? l'avais-tu à tel moment ? etc. L'adulte, par ses questions, oriente ainsi la conduite de l'enfant vers une recherche systématique. À une étape ultérieure l'enfant reprendra pour lui-même cette pratique des questions, se les posant cette fois à lui-même. Cela lui permettra, grâce à autrui et l'aide du langage, une exploration méthodique et contrôlée de son expérience passée. Peu à peu, de cette manière, pourra se développer une forme de mémoire supérieure : la mémoire volontaire.
La thèse de Vygotski, illustrée brièvement par cet exemple, est que nous finissons par appliquer à nous-mêmes les conduites sociales que nous mettons en œuvre avec autrui. L'origine des conduites humaines complexes est donc inter-psychique ; elles sont "agies" d'abord à deux, à plusieurs, pour être ensuite intériorisées, en particulier à l'aide du langage. On passe de l'inter-psychique à l'intra-psychique. La structure du psychisme est en son essence sociale.
Vygotski écrit : « *La loi génétique qui gouverne de manière générale le développement culturel peut-être formulée de la façon suivante : toute fonction chez l'enfant entre en scène deux fois, sur deux plans, d'abord sur le plan social, puis psychologique, d'abord entre individus comme catégorie interpsychique, puis au-dedans de l'enfant comme catégorie intrapsychique. Cela vaut pareillement pour l'attention volontaire, la mémoire logique, la formation des concepts ou le développement de la volonté. […] Derrière toutes les fonctions supérieures, derrière leurs rapports, il y a génétiquement des rapports sociaux, il y a des rapports réels entre des individus.* »
Il est important de ne pas dissocier cette loi du développement des analyses concernant le rôle des instruments psychologiques, en particulier du langage. En effet, le langage permet de planifier nos conduites, de les organiser, de les contrôler, de les complexifier. C'est à l'aide du langage que l'enfant pourra

reconstruire le questionnement qui lui permettra une exploration méthodique, lors d'une recherche d'un objet perdu.

Apprentissage et développement

Quels sont les rapports entre apprentissage et développement ? Il existe plusieurs réponses à cette grande question.
Pour Piaget, les apprentissages sont sous la dépendance du développement : on ne peut entreprendre un nouveau type d'enseignement que si l'enfant a atteint un certain niveau de développement. Par exemple, pour lui, l'enfant est supposé ne pas pouvoir maîtriser l'apprentissage numérique avant d'avoir construit les opérations de classification et de sériation. Piaget insiste d'ailleurs sur la nécessité pour l'enseignant de s'interroger sur le niveau de développement de l'élève avant d'entreprendre un nouvel apprentissage.
Les psychologues behavioristes, eux, refusent la distinction entre apprentissage et développement. Selon eux, il n'y a pas d'activité interne qui ressemblerait de près ou de loin à du développement. Tout ce que l'organisme fait est le fruit des apprentissages, c'est-à-dire le résultat de transformations de l'organisme par des stimuli externes ou internes.
Vygotski, au contraire, va défendre la thèse que les apprentissages précèdent et provoquent le développement. En effet, les apprentissages, lieu de construction des capacités, ouvrent des voies, orientent, amènent les fonctions psychiques à se transformer et à se réorganiser, et rendent ainsi possible le développement. Mais le développement, processus interne de transformation, n'est pas sous la dépendance entière et directe des apprentissages. Vygotski défendra toute sa vie l'existence de processus de développement internes qui échappent aux décisions extérieures de transformer l'individu. Vygotski parle en termes d'auto-développement.

Brève conclusion

Cette brève présentation de notre lecture de l'œuvre de Vygotski, évidemment bien trop réductrice, fait l'impasse sur de nombreux aspects de sa pensée. Mais elle permet peut-être d'approcher son originalité et, en particulier, de récuser le naturalisme encore trop présent en éducation. Car, d'après lui, les traits caractéristiques de notre psychisme culturellement développé ne sont pas pré-inscrits dans notre individualité biologique, mais se forment et se transforment dans nos rapports au sein du monde social. Ce que, d'ailleurs, d'autres chercheurs ont pu retrouver depuis. Cela rend caduque et le naturalisme et la vieille idéologie de la « nature humaine » transhistorique.

Pour aller plus loin

BROSSARD, M. (2004), *VYGOTSKI. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Presses Universitaires du Septentrion.
SCHNEUWLY, B. (2008), *Vygotski, l'école et l'écriture*, Les cahiers de la section des Sciences de l'Éducation, n° 118. Version pdf : https://gpc-maths.org/data/documents/schneuwly-vyg118.pdf
VYGOTSKI, L. S. (1997), *Pensée & langage*, La Dispute.

SUR L'INFINIMENT PETIT (et l'infiniment grand)

Marc Atteia-IRES de Toulouse
marcatteia@orange.fr

1. La caverne d'Ali Baba (et ses trésors)

La *rupture épistémologique* opérée par Maxwell

L'équation d'état d'un gaz parfait

Dès le 17^e siècle, les physiciens étudièrent les relations entre la pression (p), le volume (v) et la température (t) d'un gaz. En utilisant un gaz placé dans des conditions « normales », ils obtinrent les résultats concordants suivants :

(i) la loi de Boyle-Mariotte
(ii) la loi de Gay-Lussac
(iii) la loi de Chasles
(iv) la loi d'Avogadro

Un gaz réel, loin de son point de liquéfaction, peut être regardé, approximativement, comme satisfaisant les lois énoncées ci-dessus.
On appelle « gaz parfait », un gaz idéal qui satisferait aux lois énoncées ci-dessus.
La loi de Boyle-Mariotte est un modèle mathématique macroscopique d'un gaz parfait.

Et Maxwell vint ...

Considérant un gaz **G**, enfermé dans une enceinte **E**, de paroi (élastique) **P**, Maxwell fit les hypothèses suivantes :

a) Le gaz est composé d'une « myriade » de molécules (identiques) en perpétuelle agitation.
b) Chaque molécule de gaz peut être assimilée à une sphère dure de diamètre négligeable.
c) La pression exercée par le gaz sur **P** est due aux chocs des molécules du gaz contre **P.**
d) la position et les vitesses des molécules du gaz sont distribuées au hasard.
e) La température (absolue) du gaz mesure l'énergie cinétique moyenne de l'ensemble des molécules quand on néglige leur énergie

potentielle d'interaction.
Maxwell démontra, alors, que le gaz considéré vérifiait la loi de Boyle-Mariotte.

La rupture épistémologique opérée par Maxwell consistait dans les faits suivants :

(j) Maxwell déduisait la loi ***macroscopique*** de Boyle-Mariotte, vérifiée par le gaz **G** considéré et ***établie expérimentalement*** du comportement ***microscopique théorique*** des molécules (invisibles …) du gaz **G**.

(jj) Le ***modèle mathématique*** élaboré par Maxwell conjuguait le modèle classique de la Mécanique et de la théorie des Probabilités – peu développée au milieu du 19^{e} siècle.

Maxwell a ouvert une nouvelle voie dans l'étude de la matière

Il a permis aux physiciens qui utilisèrent sa méthode de découvrir le monde de l'infiniment petit -véritable caverne d'Ali Baba !
Citons brièvement, ci-dessous, les physiciens qui s'inspirant de sa démarche, ont permis à la Physique de prendre un nouvel essor.

L. Boltzmann

Il réinterpréta la théorie de la chaleur élaborée, en particulier, par Lazare Carnot et Sadi Carnot, en créant une nouvelle branche de la Physique (Thermodynamique), la ***Physique statistique***.
Il introduisit la notion d'***entropie***, fournissant, ainsi, une explication (raisonnée) de l'irréversibilité des phénomènes physiques.

Les fondateurs de la Physique quantique

Ils ont construit un modèle performant de l'univers subatomique et ont développé une nouvelle branche de la physique, la ***Physique nucléaire***.
Ces fondateurs ont découvert les propriétés étranges du monde subatomique - son caractère quantique, en particulier.
Comme en thermodynamique, la théorie des probabilités joue un rôle essentiel en Physique quantique.

Infiniment petit et infiniment grand

La connaissance du monde de l'infiniment petit a fait progresser la connaissance des lois du Cosmos, le monde de l'infiniment grand.

2. La boîte de Pandore

Le mythe de Pandore

[Pandora fut] la femme créée par les dieux, envoyé aux hommes pour les punir de leur orgueil. Femme d'Epiméthée, le frère de Prométhée, elle est responsable de la venue du mal sur la Terre, car elle a ouvert le vase où Zeus avait enfermé les misères humaines (d'où l'expression : ouvrir la boîte de Pandore. Dans la boîte, seule resta l'espérance).
(Petit Larousse, 2016).

Interprétation du mythe de Pandore

Les thèses suivantes traduisent, en langage moderne le mythe de Pandore:

> ***Première thèse :*** toute invention technique - réalisation originale, marchandise nouvelle, etc. - induit, dans l'environnement où elle est activée, une *perturbation*, c'est-à-dire une modification durable dont l'ampleur et la malignité sont a priori, imprévisibles.
>
> ***Deuxième thèse :*** *plus profonde est l'intelligence théorique* des phénomènes auxquels se réfèrent une invention, plus radicale et essentielles seront les perturbations qu'elle entraînera.
>
> ***Troisième thèse :*** la *conjonction de plusieurs inventions* qui séparément induisent des perturbations limitées, peut être à l'origine de perturbations majeures.
>
> ***Quatrième thèse :*** toute invention importante implique une *mutation des modes de pensée*. Quand cette mutation est retardée, l'invention devient cause (facteur) de crise, à plusieurs niveaux.
>
> ***Cinquième thèse :*** *la matière n'est pas une glaise* que les hommes pourraient façonner à leur guise ; la matière « transcende » toujours l'inventeur.
>
> ***Sixième thèse :*** à travers le développement de la technostructure, se précise de plus en plus nettement le dessein de l'homme occidental moderne : *s'affranchir définitivement de toutes les contraintes naturelles, pour recréer « librement » le monde.*

De nombreux exemples confirment les six thèses énoncées ci-dessus.
Nous allons donner, ci-dessous, des exemples importants ou majeurs relatifs aux inventions résultant de l'exploration de l'infiniment petit.

L'atomisme et la transsubstantiation

En 1634, trois savants de Paris annoncent qu'ils vont donner un enseignement confortant l'atomicité de la matière.
Le jour prévu pour la délivrance de cet enseignement, les autorités font disperser l'auditoire, confisquent les écrits des savants et interdisent, sous peine de mort, tout enseignement sur les atomes.
Le haut clergé catholique parisien avait, évidemment, compris que l'Eucharistie - fondement de la messe – était (rationnellement) *inconciliable* avec la théorie atomique, car, au cours de l'Eucharistie, les atomes du pain et du vin de la messe deviennent après leur consécration par le prêtre qui officie, le corps et le sang du Christ (ressuscité).

L'industrie nucléaire militaire (et la fabrication de l'arme absolue)

Les bombardements nucléaires d'Hiroshima (bombe A) et de Nagasaki (bombe H) ont terrifié le monde en 1945. Les essais nucléaires qui ont suivi ces bombardements ont pollué des territoires immenses au Sahara, dans l'océan Pacifique aux Etats-Unis et en URSS. La prolifération nucléaire est aujourd'hui une menace permanente pour l'humanité.

Les industries nucléaires dites civiles

Depuis la construction des premières centrales nucléaires, les industries nucléaires dites civiles se sont multipliées sur notre planète et ont gravement gangréné les sols, les eaux, l'air qui constituent notre environnement par les déchets radioactifs qu'elles produisent et qui s'accumulent sans cesse.
Ces industries sont les causes des terribles catastrophes qui ont ravagé Tchernobyl et Fukushima, en particulier. Les industries nucléaires dites civiles en raison de leur nocivité multiforme contribueront pendant des siècles ou des millénaires au malheur des hommes.

La funeste découverte du monde de l'infiniment petit

Dans son livre, « le feu d'Héraclite », le biologiste Edwin Chargaff a écrit :
« Ma vie a été marquée par deux découvertes funestes dont il est encore impossible d'évaluer l'effet final :
(i) la fission de l'atome
(ii) les manipulations consécutives à l'explication de la chimie de l'hérédité.

Dans les deux cas, c'est un noyau qui est maltraité, celui de l'atome et celui de la cellule. Dans les deux cas, j'ai le sentiment que la science a franchi une limite devant laquelle elle aurait reculé ».

Et demain ....

Les travaux des chercheurs sur l'infiniment petit se poursuivent aujourd'hui, sans garde-fous. L'ignorance, dans le domaine scientifique, du plus grand nombre contribue à faire perdurer le mythe fallacieux du Progrès et de lendemains qui chanteront...

3. Etre pascalien aujourd'hui : Science sans conscience

Constat

La majorité des français, aujourd'hui, ne s'alarme pas de la gravité de la situation du monde que nous avons mise en évidence dans la deuxième partie ci-dessus. On peut ainsi, sur le problème nucléaire, classer les français en trois catégories :

a) ceux qui se considèrent comme trop ignorants, dans le domaine scientifique, pour oser émettre un jugement personnel. Comme les membres du gouvernement, ils se fient à l'avis des « experts » qui, depuis toujours, minimisent les dangers des industries nucléaires « civiles » et militaires ainsi que la gravité des accidents qui se produisent pendant leur fonctionnement.
b) ceux qui approuvent le choix par la France de développer une industrie nucléaire. Leur choix est idéologique ou existentiel. Parmi eux, citons par exemple les employés du CEA.

c) ceux qui banalisent les problèmes éthiques posés par l'infiniment petit. Ceux-là identifient, ainsi, une centrale nucléaire à une unité de production d'électricité d'un autre type. Ils banalisent, de même, les dangers des biotechnologies et des nanotechnologies.

Face aux catégories désignées ci-dessus, se manifestent un petit nombre de lanceurs d'alerte. Citons, parmi les plus anciens, complètement oubliés, hélas ! :
Jean Rostand qui, après le bombardement d'Hiroshima, écrivit :
« [Hiroshima] fulgurant symbole de la barbarie savante, de la sauvagerie des soi-disant civilisés »

Andreï Sakharov, inventeur de la bombe H, qui avait écrit :
« La culpabilité qui est attachée à un tel crime a troublé depuis ce jour mon âme et mon esprit. J'ai passé dans les hôpitaux et parfois en prison, huit années sur quinze. En prison, je me sentais toujours plus heureux, puisque par ma punition, j'expiais ma faute».

Etre pascalien aujourd'hui

Dans ses « Pensées », Blaise Pascal a écrit :
« Car, enfin, qu'est-ce que l'homme dans la nature ?
Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout.
[…] Quand on est instruit, on comprend que la nature ayant gravé son image et celle de son auteur dans toute chose, elles tiennent presque toutes de sa double infinité.
[…] De ces deux infinis des sciences, celui de la grandeur est bien plus sensible, et c'est pourquoi il est arrivé à peu de personnes de prétendre connaître toute chose.
[…] Mais l'infinité en toute chose est bien moins visible.
Les philosophes ont bien plutôt prétendu d'y arriver et c'est là où tous ont achoppé.
[…] Il ne faut pas moins de capacité pour aller jusqu'au néant que jusqu'au tout.
[…] Les extrémités se touchent et se réunissent en Dieu et en Dieu seulement. (souligné par M.A.) »

Ce que Pascal a découvert au 17^e^ siècle, nos médiatiques philosophes ne l'ont pas compris, englués dans une conception strictement matérialiste du monde. Ils n'ont pas compris que comme le monde des hommes est soumis, aujourd'hui, à des lois héritées des anciens, des lois qui sont le fruit de leurs méditations sur l'infiniment grand, de même « pour l'honneur de l'esprit humain », les hommes auraient dû, depuis longtemps, proposer sous forme de charte, de loi, une éthique de l'infiniment petit, en se souvenant de la maxime de Rabelais :

« Science sans conscience, n'est que ruine de l'âme ».

L'algorithmique n'est pas la programmation !

Roger Cuppens (IRES de Toulouse)

Résumé.

Cet article utilise la notion de fonction récursive pour introduire l'algorithmique en mathématique. Il étudie deux exemples simples pour montrer que l'algorithmique ne suffit pas pour comprendre toutes les difficultés pour effectuer des calculs mathématiques avec des calculatrices ou des ordinateurs et de comprendre les résultats ainsi obtenus.

Mots clés : *algorithmique, programmation, fonction récursive, factorielle, série harmonique*.

1. Introduction

On sait que les nouveaux programmes de mathématiques contiennent une introduction à l'algorithmique. Si on admet la nécessité de cette introduction comme étape préliminaire à la compréhension et à l'utilisation des ordinateurs, on peut se poser la question de savoir si les techniques employées actuellement sont les plus simples et les mieux adaptées pour ce but. Dans cet article on présente un modèle montrant que l'on peut en douter.

2. Le calculable

Dans une ancienne version du Petit Larousse illustré, j'ai trouvé ces définitions d'un algorithme et de l'algorithmique :
– **algorithme** : suite finie d'opérations élémentaires constituant un schéma de calcul ou de résolution de problème ;
– **algorithmique** : science des algorithmes utilisés notamment en informatique.
Mais qu'est-ce-qu'un calcul ? qu'est-ce-qu'un problème ?

Une étude historique montre que jusqu'à la fin du 19^{e} siècle la notion d'algorithme semble se confondre avec la notion de calcul mathématique. Mais la définition de cette dernière reste une énigme (sans gros intérêt à l'époque).

Le développement du calcul différentiel et intégral a montré la nécessité d'une définition précise de l'ensemble des réels, voire une nouvelle conception des mathématiques. Pour satisfaire ce besoin, Cantor introduit un système qui est qualifié par Hilbert comme « le paradis ». Néanmoins ce système comprend un axiome appelé *axiome du choix* qui permet de démontrer des résultats contraires au bon sens : par exemple Banach montre comment on peut découper une boule en un nombre fini de morceaux à partir desquels on peut reconstruire une boule deux fois plus grosse.

Ceci ne peut satisfaire de nombreux mathématiciens, en particulier les mathématiciens « appliqués » qui considèrent que leurs travaux doivent pouvoir être utilisés dans d'autres sciences. Pour essayer de concilier tout le monde, Henri Poincaré a proposé de définir le *calculable*. Dans les années 1930, plusieurs solutions ont été proposées qui s'avèrent toutes équivalentes. Nous n'en retiendrons que deux :

– la machine (théorique) de Turing qui est la plus connue ;

– le λ-calcul de Church : un calcul est une fonction (ou une boite noire) où on entre des données et qui fournit un (le ?) résultat. Cette fonction peut être récursive (définie à partir d'elle). Bien entendu il faut introduire des conditions pour que le système soit cohérent.

On sait que la machine de Turing a été la base des calculateurs (pour les anglo-saxons), mais que nous appelons (malencontreusement peut être !) ordinateurs.

Par contre le point de vue de Church a inspiré les langages fonctionnels dont le premier fut LISP, mais aussi le langage LOGO développé pour apprendre les idées de base de l'informatique à de très jeunes enfants. Ces langages ont été très décriés car ils nécessitent des machines ayant beaucoup de mémoire, ce qui n'est évidemment plus un problème actuellement. En s'inspirant de ce modèle, on peut introduire la définition :

Un *algorithme* est une fonction qui à partir de *variables* (les données du problème) fournit une *réponse* (la solution du problème).

La fonction peut faire appel à d'autres fonctions (sous-problèmes) et éventuellement à elle-même mais avec d'autres variables (appel récursif).

Remarques. 1. Ceci concerne la plupart des problèmes que l'on se pose : calculer le prix d'un achat, construire un itinéraire, construire une figure géométrique, etc.
2. Tous ces problèmes peuvent se faire actuellement soit « à la main » pour les plus simples, soit avec une machine. Dans ce dernier cas, on distinguera soigneusement
– l'algorithme (description générale de la méthode)
– les développements nécessaires pour utiliser cette méthode sur la machine (programmation)

Pour écrire un algorithme, l'emploi de fonctions récursives écrites avec la syntaxe habituelle semble le mieux adapté et le plus conforme à l'usage des mathématiciens.

3. Une algorithmique de base

Il est traditionnel de partager les connaissances en divers *mondes* (ou *univers*) définis par quelques notions primitives de base, constantes ou fonctions.

3.1. Le monde de la logique.

Dans le monde du calcul (et ailleurs), on ne peut rien faire sans un minimum de logique. Dans le monde de la logique, on admet deux constantes de base, *vrai* et *faux,* et on appelle *prédicats* (ou *fonctions booléennes*) des fonctions ayant pour valeurs ces deux constantes. On utilise une primitive de base, à savoir la fonction *si ... alors ... sinon* dont la syntaxe est :

si (*prédicat*) alors [fonction 1] sinon [*fonction 2*].

Avec cette seule primitive, on peut définir les principales fonctions logiques : *non*, *et*, *ou*, *ou_exclusif* :

non (p) = si (p) alors [faux] sinon [vrai]
et (p,q) = si (p) alors [q] sinon [faux]
ou (p,q) = si (p) alors [vrai] sinon [q]
ou_exclusif (p,q) = si (p) alors [non(q)] sinon [q]

3.2. Le monde des listes

Dans cette algorithmique, la structure fondamentale est celle de *liste* qui correspond dans le langage mathématique traditionnel à celle de suite finie. Une liste l sera notée comme une suite d'éléments dans des crochets

$$l = [a\ b\ c\ ...]$$

Pour les manipuler, on introduit
– une liste vide notée [ ] ;
– un prédicat de base *videp?* : pour une liste l,

videp? (l) = si (l = [ ]) alors [vrai] sinon [faux] ;

– un constructeur *metspremier* : si x est un élément et l une liste, metspremier(x,l) fournit la liste composée de l'élément x suivi de tous les éléments de la liste l.
– deux sélecteurs *premier* et *saufpremier* ; comme leur nom l'indique, pour une liste l non vide, premier (l) fournit le premier élément de l et saufpremier (l) fournit la liste l amputée de son premier élément.

Il est commode aussi d'introduire des fonctions *dernier* et *saufdernier*, mais on constatera qu'on peut les redéfinir à partir des précédentes : pour une liste non vide l,

dernier (l) = si videp? (saufpremier (l))
alors [premier l)]
sinon [dernier (saufpremier (l))]

saufdernier (l) = si videp? (saufpremier (l))
alors [l]]
sinon [metspremier (premier (l), saufdernier (l))]

3.3. Les mondes numériques.

Dans ces mondes, on suppose un ensemble de nombres sur lesquels on sait définir (au moins) :
– les nombres 0 et 1,
– les opérations de base + et ×,
– les relations d'ordre <, >, ≤ et ≥.

Remarque. On utilisera les notations traditionnelles, mais pour les puristes on pourrait introduire la notation polonaise : + (a,b) au lieu de $a + b$ etc.

Voici quelques exemples de fonctions utiles :

–si l est une liste de nombres, les fonctions

sommeliste (l) = si videp? (l) alors [0]
sinon [premier (l) + sommeliste (saufpremier (l))]
produitliste (l) = si videp? l) alors [1]
sinon [premier (l) × produitliste (saufpremier (l)]

fournissent les opérations notées traditionnellement $\sum$ et $\prod$.

– si p et q sont deux entiers, la fonction

listenombres (p,q) = si ($q < p$)
alors [[ ]]
sinon [metspremier (p,listenombres (p+1,q)]

fournit la liste croissante des nombres de p à q.

4. Un exemple : le calcul de la factorielle

4.1. Généralités

En arithmétique, on définit la factorielle d'un nombre positif n (notée traditionnellement n!) comme étant le produit de la liste des n premiers nombres entiers, autrement dit :

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j$$

Puisque pour n = 0, la liste des entiers est vide, on peut admettre que

$$0! = 1. \tag{1}$$

De plus l'associativité et la commutativité de la multiplication donnent

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j = \prod_{j=1}^{n-1} j \times n = n \times \prod_{j=1}^{n-1} j = n \times (n-1)! \tag{2}$$

En algorithmique, on préférera introduire la notation fonctionnelle factorielle (n) en lieu et place de n!. La définition donnée ci-dessus nous permet de dire que

$$\boxed{\text{factorielle}(n) = \text{produitliste}(\text{listenombres}(1,n))}$$

Néanmoins on préférera prendre comme définition

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{factorielle}(n) & = & \text{si } (n=0) & \text{alors} \quad [1] \\ & & & \text{sinon} \quad [n \times \text{factorielle}(n-1)] \end{array}} \tag{3}$$

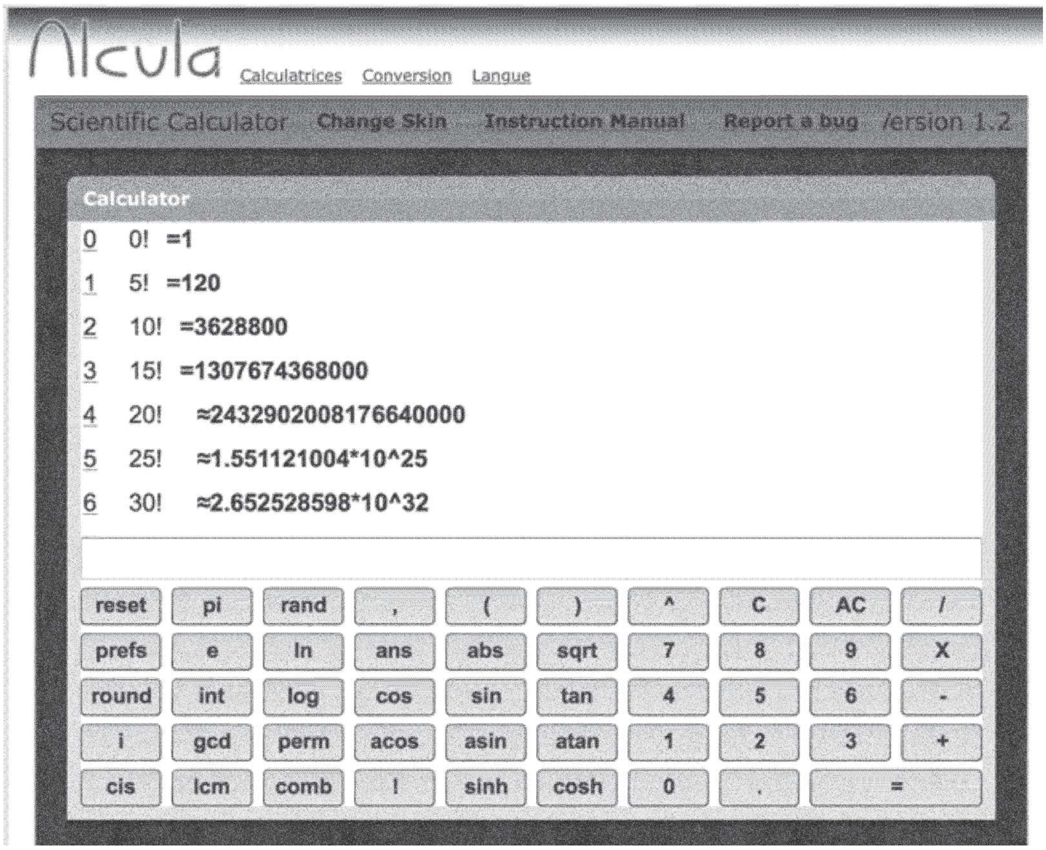
qui se déduit immédiatement de (1) et (2). On obtient alors facilement « à la main » la valeur de factorielle (n) pour les petites valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
factorielle(n)	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Mais ceci devient rapidement fastidieux. Pour de plus grandes valeurs, on peut utiliser une calculatrice ou un ordinateur.

4.2. Avec une calculatrice

Il existe des calculatrices scientifiques avec une touche « ! » donnant immédiatement la « valeur » d'une factorielle, par exemple la calculatrice Alcula que j'ai trouvée sur mon ordinateur et avec laquelle en tapant le nombre n et en cliquant sur les touches « ! » et « = » on obtient immédiatement une réponse :



Les premières réponses ;

1! =1	7! =5040	13! =6227020800
2! =2	8! =40320	14! =87178291200
3! =6	9! =362880	15! =1307674368000
4! =24	10! =3628800	16! =20922789888000
5! =120	11! =39916800	17! =355687428096000
6! =720	12! =479001600	18! =6402373705728000

sont des nombres entiers jusque 18 (qui confirment évidemment les valeurs obtenues précédemment à la main). Puis de 19 à 21 la calculatrice semble hésiter puisque sa réponse est un nombre entier mais précédé du symbole « ≈ » au lieu du symbole « = » :

19!	≈121645100408832020
20!	≈2432902008176640000
21!	≈51090942171709440000

On remarquera que la valeur fournie pour 19 ne peut pas être exacte car elle doit se terminer comme pour 18 par 000. Ensuite de 22 à 170 elle fournit une valeur approchée avec la notation habituelle des nombres réels $p \times 10^e$ qui fournit une information sur le nombre x cherché : x est un nombre entier de $e + 1$ chiffres dont les 10 premiers sont les chiffres composant le nombre p :

22!	≈1.124000728*10^21	26!	≈4.032914611*10^26
23!	≈2.585201674*10^22	27!	≈1.088886945*10^28
24!	≈6.204484017*10^23	28!	≈3.048883446*10^29
25!	≈1.551121004*10^25	29!	≈8.841761994*10^30
30!	≈2.652528598*10^32	70!	≈1.197857167*10^100
40!	≈8.159152832*10^47	80!	≈7.156945705*10^118
50!	≈3.04140932*10^64	90!	≈1.485715964*10^138
60!	≈8.320987113*10^81	100!	≈9.332621544*10^157
110!	≈1.588245542*10^178	150!	≈5.713383956*10^262
120!	≈6.689502913*10^198	160!	≈4.714723636*10^284
130!	≈6.466855489*10^219	170!	≈7.257415615*10^306
140!	≈1.346201248*10^241	171!	≈Infinity

Enfin à partir de 171, elle abandonne.

En résumé la calculatrice traite différemment les petits et les grands nombres entiers. Pour la factorielle elle fournit jusque 170 une valeur qui suivant les cas est le nombre entier exact ou un ordre de grandeur de ce nombre.

4.3. Avec un ordinateur

Pour exécuter un calcul avec un ordinateur, il faut commencer par choisir le logiciel approprié, puis apprendre l'algorithme correspondant dans le langage de la machine. C'est cette dernière étape que l'on appelle la *programmation*. Dans le cas qui nous occupe, le langage doit connaître l'arithmétique et pouvoir traiter des grands nombres entiers. Pour cela j'utilise le langage x-logo. Dans ce langage, voici le programme ad hoc :

```
pour fact :n
si :n=1 [ret 1] [ret :n * fact :n-1]
fin
```

(la primitive *ret* indique à la machine la valeur à retourner).

Avec cette procédure, on obtient bien entendu les 18 premières valeurs de fact (n), puis

$$\text{fact }(19) = 121645100408832000$$
$$\text{fact }(20) = 2432902008176640000$$
$$\text{fact }(21) = 51090942171709440000$$

La première corrige l'erreur signalée dans les résultats de la calculatrice tandis que les deux autres sont semblables à ceux de cette dernière. Si l'on continue, on obtient

$$\text{fact }(22) = 1124000727777608000000 \qquad (4)$$
$$\text{fact }(23) = 25852016738884980000000 \qquad (5)$$

Ces valeurs sont manifestement incorrectes car comme fact (21) elles devraient se terminer par 4 zéros. Mais les deux sont composées d'un nombre de 16 chiffres suivis de 6 zéros pour le premier et de 7 zéros pour le deuxième. Or 16 + 6 et 16 + 7 sont exactement le nombre de chiffres annoncés par la calculatrice. On peut donc penser qu'une lecture correcte de (4) et (5) est celle de la calculatrice :

$$\text{fact }(22) \approx 1{,}124000727777608 \times 10^{21}$$
$$\text{fact }(23) \approx 2585201673888498 \times 10^{22}$$

Or dans la notice de x-Logo on trouve la primitive suivante :

fixedecimales *n*

Permet de fixer le nombre de décimales souhaités lors des calculs. Cette primitive règle en fait le degré de précision des calculs. Quelques précisions :

- Par défaut, les calculs se font avec 16 décimales.
- Si n est négatif, le mode d'affichage par défaut est choisi.
- Si n est nul, les nombres affichés sont arrondis à l'unité.

Le nombre 16 est donc la valeur par défaut. On peut donc espérer les valeurs suivantes en utilisant la procédure suivante

```
pour efact :n :p
fixedecimales :p
ret fact :n
fin
```

qui donne (avec les valeurs de p fournies par la calculatrice) :

$$\text{efact }(22{,}21) = 1124000727777607680000$$
$$\text{efact }(23{,}22) = 25852016738884976640000$$
$$\text{efact }(24{,}23) = 620448401733239439360000$$
$$\text{efact }(25{,}25) = 15511210043330985984000000$$

et aussi

efact (170,306) =
725741561530799896739672821112926311471699168129645137654357779
89005618434017061578523507492426174595114909912378385207766660
22565442753025328900773207510902400430280058295603966612599658
25710439855829425756896631343961226257109494680671120556888045
719334021266145280000000000000000000000000000000000000000

Pour obtenir fact (n) pour des valeurs de n plus grandes, on peut déterminer le taux de précision p correspondant. En effet si x est un nombre réel de la forme $k \times 10^p$ avec $k < 10$, alors log (x) = p + log (k) et, puisque log (k) < 1, p est la partie entière de log (x). De plus de

$$\log(n!) = \sum_{j=1}^{n} \log(j)$$

on déduit qu'en fournissant à x-Logo le programme

```
pour pfact :n
ret tronque logfact :n
fin
pour logfact :n
si :n=1 [ret 0] [ret (log10 :n) + logfact :n-1]
fin
```

on obtiendra par exemple

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pfact(n)	0	0	0	1	2	2	3	4	5	6	7	8

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
pfact(n)	9	10	12	13	14	15	17	18	19	21	22	23

mais aussi

n	180	190	200	250	300	350	400
pfact(n)	329	351	374	492	614	740	868

puis

efact (200,374) =
78865786736479050355236321393218506229513597768717326329474253
32443594499634033429203042840119846239041772121389196388302576
42790242637105061926624952829931113462857270763317237396988943
92244562145166424025403329186413122742829485327752424240757390
32403212574055795686602260319041703240623517008587961789222227
89623703897374720000000000000000000000000000000000000000000000
000.

Remarque. On peut calculer une valeur exacte de la factorielle de n sans avoir la valeur exacte de $\mathrm{pfact}\ (n)$. En effet on peut utiliser le fait que pour deux entiers différents k et l $(k < l)$,

– si $\mathrm{efact}(n,k) < \mathrm{efact}(n,l)$, alors $k < \mathrm{pfact}\ (n)$;

– si $\mathrm{efact}(n,k) = \mathrm{efact}(n,l)$, alors $k \geq \mathrm{pfact}\ (n)$ et $\mathrm{efact}(n,k) = \mathrm{efact}(n,\mathrm{pfact}\ (n))$.

Par exemple de

$$\mathrm{efact}\ (200,300) =$$

78865786736479050355236321393218506229513597768717326329474253
32443594499634033429203042840119846239041772121389196388302576
42790242637105061926624952829931113462857270763317237396988943
92244562145166424025403329186413122742829485327752424240757390
32403212574055795686602260319041703240623517008588000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000

$$\mathrm{efact}\ (200,400) = \mathrm{efact}\ (200,500) =$$

78865786736479050355236321393218506229513597768717326329474253
32443594499634033429203042840119846239041772121389196388302576
42790242637105061926624952829931113462857270763317237396988943
92244562145166424025403329186413122742829485327752424240757390
32403212574055795686602260319041703240623517008587961789222227
89623703897374720000000000000000000000000000000000000000000000
000

on déduit que $300 < \mathrm{pfact}\ (200) < 400$ et que $200! = \mathrm{efact}\ (200,400)$.

4.4. Remarques

1. Le calcul d'un nombre entier peut fournir deux réponses : le nombre exact ou l'ordre de grandeur de ce dernier.

2. La réponse d'une machine peut être difficile à interpréter, voire être incorrecte. Dans ce dernier cas, on invoquera que l'algorithme est faux ou que l'on est sorti de son domaine de validité.

3. L'algorithmique des entiers naturels donne une idée très différente de celle de l'ensemble $\mathbb{N}$ habituel. Par exemple, cet ensemble doit être considéré comme un ensemble infini potentiel comme chez Euclide. De plus un théorème comme « tout entier est un produit de nombres premiers » ne peut fournir qu'un algorithme de domaine limité, ce qui est d'ailleurs utilisé en théorie du codage.

5. La suite harmonique

5.1. Introduction

Mon point de départ est la deuxième partie de l'épreuve du Bac S “ Algorithmique ” Métropole 2012 :

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n. Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Plutôt que de critiquer *in abstracto* cet extrait, je vais montrer d'abord ce que peuvent apporter mes idées et les difficultés qu'on peut rencontrer.

5.2. Définition et étude dans l'ensemble des rationnels

Pour un professeur de mathématique, il s'agit ici de l'étude de la notion de série harmonique présentée par exemple dans la rubrique de ce nom de Wikipédia comme la somme des inverses des premiers nombres entiers, autrement dit la suite des nombres

$$h_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

ou si on pense algorithmiquement de la fonction récursive

$$\boxed{\mathrm{harmo}(n) = \text{si } (n=1) \text{ alors } [1] \text{ sinon } \left[\mathrm{harmo}(n-1) + \frac{1}{n}\right]} \qquad (6)$$

Cette fonction est particulièrement importante car c'est la plus simple des sommes dont les termes tendent vers 0, mais qui tend vers l'infini (autrement dit qui devient arbitrairement grande).

Peut-on « voir » ceci en calculant h_n ? On a vu que cette question peut avoir plusieurs réponses suivant que l'on veut une valeur « exacte » de ce nombre ou seulement un ordre de grandeur. Pour une valeur exacte, on peut considérer que la fonction harmonique prend ses valeurs dans l'ensemble des rationnels et, puisque cet ensemble est un corps, on a le théorème suivant rarement énoncé, mais facile à démontrer :

Si (a_j) et (b_j) sont deux suites de nombres entiers avec $b_j \neq 0$, alors $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b_j} = \frac{p_n}{q_n}$ avec $q_n = \prod_{j=1}^{n} b_j$ et $p_n = b_n p_{n-1} + a_n q_{n-1}$.

En appliquant ce résultat pour $a_j = 1$ et $b_j = j$, on déduit que harmo (n) est un nombre rationnel de dénominateur $n!$ et de numérateur le nombre numharmo (n) défini par

$$\boxed{\text{numharmo}(n) = \text{ si } (n=1) \text{ alors } [1] \text{ sinon } [n \times \text{numharmo}(n-1) + \text{fact}(n-1)]}$$

On obtient facilement les premières valeurs de cette fonction :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
numharmo(n)	1	3	11	50	274	1764	13068	109584

Remarque. Cette méthode est utile lorsque l'on s'intéresse aux problèmes de la précision (ou des erreurs) de calculs faits par une machine. En effet dans un tel calcul sur les entiers on peut faire des additions, soustractions et multiplications exactes ; seules les divisions introduisent de telles erreurs qui se multiplieraient si on faisait le calcul de la fonction harmo à partir de (6) alors que la méthode proposée ici ne comprend qu'une seule division terminale. Pour de tels exemples, voir dans [2] le calcul des décimales des constantes e et π. Ici pour étudier les propriétés de la suite harmo, on n'a pas besoin d'une grande précision.

5.3. Calcul et propriétés de la suite harmonique

Avec les méthodes du paragraphe 4, on obtient de la définition (6) les valeurs approximées à 10^{-3} suivantes :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
harmo(n)	1	1.5	1.833	2.083	2.283	2.45	2.593	2.718	2.829	2.929

n	20	30	40	50	60	70	80	90	100
harmo(n)	3.598	3.995	4.279	4.499	4.68	4.832	4.965	5.083	5.187

n	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
harmo(n)	5.878	6.283	6.57	6.793	6.975	7.129	7.262	7.38	7.485

On voit que la fonction croissante harmo(n) a une croissance extrêmement lente puisque harmo (1000) − harmo (1) ≃ 6.485. Or on connait une fonction ayant un comportement semblable, à savoir la fonction ln (logarithme népérien) pour laquelle ln (1000) ≃ 6.908.

On va donc comparer ces deux fonctions en introduisant une fonction que pour des raisons qui apparaîtront ci-dessous nous appelons gamma :

$$\boxed{\mathrm{gamma}(n) = \mathrm{harmo}(n) - \ln(n)}$$

avec laquelle on obtient les valeurs :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{gamma}(n)$	1	0.807	0.735	0.697	0.674	0.658	0.647	0.638

(approchées à 10^{-3}) et pour les dernières valeurs

n	1000	1500	2000	2500	3000	3500
$\mathrm{gamma}(n)$	0.577716	0.577549	0.577466	0.577416	0.577382	0.577359

que ma machine a bien voulu me fournir (approchées à 10^{-6}). On peut en conjecturer que la suite $\mathrm{gamma}(n)$ est décroissante et qu'elle a donc à l'infini une limite γ qui s'appelle dans la littérature constante d'Euler et dont 0.577 serait une valeur approchée à 10^{-3}.

5.4. La série harmonique alternée

On peut traiter de même la série harmonique alternée définie par la suite

$$k_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j}$$

ou la fonction

$$\boxed{\mathrm{harmoalt}(n) = \mathrm{si}\ (n = 1)\ \mathrm{alors}\ [\text{-}1]\ \mathrm{sinon}\ \left[\mathrm{harmoalt}(n-1) + \frac{(-1)^n}{n}\right]}$$

Puisque les suites (k_{2n}) et (k_{2n+1}) sont adjacentes, la suite (k_n) converge et de

$$\mathrm{harmoalt}\ (3000) \simeq -0.692581,\ \mathrm{harmoalt}\ (3001) \simeq -0.693314$$

et exp (0.693) $\simeq 2$, on peut conjecturer que la limite de (k_n) est ln 2, ce qui peut se démontrer à partir de de la convergence de la fonction gamma.

5.5.

Je terminerai ce paragraphe par quelques remarques sur le sujet du Baccalauréat cité au début de ce paragraphe :

Dès la première question, sans parler du regrettable emploi de la variable u alors que u_n vient juste d'être employé pour une toute autre chose, on constate toute l'ambiguïté de la notion d'algorithme adoptée (plus proche à vrai dire d'une programmation) puisqu'on dit « u est un réel » et on ne précise pas la notion de « valeur exacte » pour un tel nombre : 11/6 ou 1,833… ?

La deuxième question montre que la notion d'algorithme utilisée ne convient pas pour élaborer un calcul complexe puisqu'elle suggère de recopier au lieu d'utiliser un calcul déjà fait.

6. Conclusion

Avant l'avènement des ordinateurs, les calculs se faisaient « à la main » en utilisant des tables de logarithmes et trigonométriques et /ou des règles à calcul. Dans les années soixante, la quatrième épreuve de l'agrégation de mathématiques était une épreuve de calcul numérique de quatre heures se faisant dans ces conditions et dont le but était un calcul complexe avec estimation de la précision du résultat obtenu. On aurait pu croire que l'utilisation des portables et des calculatrices scientifiques changerait beaucoup les choses. Il n'en a rien été : les discussions sur ces moyens de calcul portaient plus sur la possibilité de fraudes aux examens et la préservation de l'égalité des chances aux examens que leur utilisation dans l'enseignement. Peut-on croire que l'introduction actuelle de « l'algorithmique » sans parler des nombreux problèmes posés par les calculs sur machine dont je viens de montrer quelques exemples dans cet article changera réellement les chose ?

Références

[1] Roger CUPPENS. La récursivité ou l'algorithmique sans boucles. Bulletin de l'APMEP n° 513 (2015, p. 211-226.

[2] Roger CUPPENS. La récursivité de la tortue. Bulletin de l'APMEP n° 515 (2015) p. 455-464.

[3] Roger CUPPENS. Les reptiles et le pavage du plan. Atelier D31 présenté aux Journées de l'APMEP 2015 de Laon.

[4] Roger CUPPENS. La tortue, les reptiles et les dragons : le pavage du plan par des fractales. Atelier L32 présenté aux Journées de l'APMEP 2015 de Laon.

[5] Roger CUPPENS. Les reptiles d'ordre 2. Atelier présenté aux Journées de l'APMEP 2016 de Lyon.

Ces trois derniers textes restés inédits peuvent être obtenus sur simple demande auprès de l'auteur : roger.cuppens @ orange.fr

Je remercie Michel Carral et Tony Paintoux qui ont bien voulu relire ce texte et me faire des suggestions importantes.

MEDIANE ou MOYENNE

Michel MYARA
IRES de Toulouse-Groupe lycée

Lorsque nous enseignons la statistique descriptive au collège ou au lycée, nous commençons très tôt, en classe de quatrième, par le calcul de la moyenne d'une série statistique. Le calcul et l'interprétation de la médiane n'interviennent qu'un an plus tard, en classe de troisième, et uniquement pour les séries de valeurs discrètes.
A aucun moment dans le cursus scolaire, le problème de la pertinence du choix de l'un ou l'autre des paramètres n'est abordé. Dès lors, il n'est guère étonnant que nos élèves, et par suite, les consommateurs de statistiques qu'ils deviendront utilisent sans discernement la moyenne ou la médiane.
Il est inconcevable, qu'à une époque où les moyens de calculs ne sont plus un obstacle, nous puissions encore commettre des erreurs dans les choix de modèles statistiques comme celles décrites par Bernard PY dans son ouvrage "Statistiques sans formule mathématique". Mais examinons plutôt quelques situations mettant en défaut l'un des deux paramètres : médiane ou moyenne.

UN CAS D'ECOLE

Que penser de la distribution suivante d'observations discrètes ? Quel est son "centre"? Quel nombre est significatif comme "valeur centrale"?
(2, 2, 2, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 1000)
Le calcul de la moyenne donne : $\frac{1104}{19} = 58{,}1$.
Est-il raisonnable de penser que le "centre" de cette série de valeurs se situe significativement aux alentours de 58 ? Bien évidemment, non !
Visiblement, il y a un intrus : la valeur 1000 n'est pas du même ordre de grandeur que les autres.
Erreur de saisie ou réalité "hors normes" ?
Sans réponse à cette question, l'élagage de la série statistique permettrait d'aboutir à des résultats convenables, mais qui perdraient toute validité scientifique.

Par conséquent, dans le cas présent, le choix de la moyenne comme paramètre central s'avère être un mauvais choix.

Que donne la médiane ?
La médiane est la 10$^{\text{ième}}$ valeur de la série soit 6.

Laissant 9 observations "avant", et 9 observations "après", la médiane se trouve être beaucoup plus significative.

On a utilisé ici toutes les observations de la série. Une médiane de 6 est effectivement plus réaliste qu'une moyenne de 58,1.
Le fait que la médiane ne soit pas calculée directement sur les valeurs observées permet de gommer l'effet de possibles valeurs aberrantes aux bornes de la série statistique.
La moyenne obtenue dans ce cas ne peut en aucune manière être qualifiée de fausse : elle est mal adaptée, c'est tout.

NOTES ET MOYENNES

Les appréciations de qualité de certaines observations se font souvent par des notes : notes d'élèves à un examen, notes du jury aux participants d'une épreuve artistique, notes de qualité de produits testés, etc. Dans la vie courante, on a tendance à comparer telle ou telle note à la moyenne arithmétique de l'ensemble des notes. Implicitement, donc, l'habitude fait en sorte que l'on fait, une fois encore, appel à l'idée de moyenne pour repérer ce fameux centre, qui ne serait, ni fort, ni faible, tout juste "au milieu".
Voyons sur un exemple ! Pour une classe de 35 élèves, les notes obtenues à un devoir sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	1	0	0	1	2	4	3	4	4	2	0	1	0	2	3	2	1	0	1	2	2
ECC	1	1	1	2	4	8	11	15	19	21	21	22	22	24	27	29	30	30	31	33	35

La moyenne de la classe est 9,9 alors qu'il n'y a que 14 notes supérieures à 10.
La note médiane est 8 (18^{ième} valeur sur 35) permet de mieux situer le « centre » de cette série de notes.
L'élagage de la série par suppression des notes 0 et 20 donne les résultats suivants :
Moyenne = 9,6 et Médiane = 8
Dans ce cas, l'élagage de la série statistique ne change que peu de choses.

Là encore, la moyenne n'est pas forcément le bon indicateur car la notion "d'appréciation" qui nous intéresse ici, induit directement une logique d'ordre, de rang, de classement, qui est à la base de la définition de la médiane.
La note de l'étudiant médian à un examen permet de mieux situer un individu par rapport à l'ensemble que classique la note moyenne de 10/20.

SALAIRE MOYEN ET SALAIRE MEDIAN

Plages de salaires		Fréquences en %
B.inf	B.sup	
200	400	0,5
400	600	1
600	800	4
800	1000	7
1000	1200	10
1200	1400	13
1400	1600	12
1600	1800	10
1800	2000	8
2000	2200	6
2200	2400	4
2400	2600	3
2600	2800	3
2800	3000	2
3000	3200	1,5
3200	3400	1,5
3400	3600	1
3600	3800	1
3800	4000	1
4000	4200	0,5
4200	4400	0,5
4400	4600	0,5
4600	10000	9
		100

Dans l'exemple suivant les données sont extraites du site www.salairemoyen.com , données mises à disposition par l'INSEE.

Répartition des salaires nets mensuels des salariés en France métropolitaine fin 2012

D'après ce tableau, le salaire net mensuel moyen des français fin 2014 est de 2239 €.

Certains trouveront ce résultat trop élevé, d'autres trop faible. Le fait est que cette valeur n'est qu'une moyenne. Il ne signifie pas que la majorité des Français touchent tous les mois cette somme mais que, si tous les salariés Français touchaient le même salaire mensuel, ce salaire serait de 2239 €.

Plus significatif est le salaire médian net mensuel de 1650 €. Ce dernier sépare la moitié des Français qui gagnent moins que cette somme de l'autre moitié qui gagne plus.

Si l'on recalcule les paramètres précédents en excluant la plage des salaires les plus élevés les résultats obtenus sont alors :
Salaire mensuel net moyen = 1730 €
Salaire médian = 1580 €

L'influence des hauts salaires est donc considérable sur la moyenne alors qu'elle est minime sur la médiane. Le salaire moyen cache de grandes disparités et ne peut donc pas être utilisé pour des comparaisons.

On ne peut pas dire que la moyenne soit fausse, elle est simplement inadaptée à l'utilisation que l'on en fait, à savoir : situer un salaire donné par rapport à l'ensemble.

LE CAS D'UNE MOYENNE PARTIELLE

Ici, il ne s'agit, non plus de détails de calcul, mais simplement de la prise de conscience de la "puissance psychologique" que nous impose traditionnellement cette notion de moyenne dans nos perceptions des événements de la vie courante.
Prenons, par exemple, le cas d'un professeur de philosophie qui, pour répondre à la demande insistante des 800 étudiants qu'il a devant lui dans l'amphithéâtre, dirait : "Je ne peux pas vous donner vos notes, car je n'ai pas fini de corriger vos copies, mais la moyenne de celles que j'ai corrigées jusqu'à présent se situe aux alentours de 11/20."
Il percevra sans doute un grand soupir de soulagement dans l'auditoire. Soupir complètement injustifié de la part de chacun des étudiants puisque, d'une part, aucun d'eux n'est capable de se situer par rapport aux autres en la matière et que, d'autre part, ils ne connaissent pas la variabilité de l'échelle de notation du professeur.

UNE ETUDE DE LA CEPEC-S.A.

D'après le CEPEC (Centre d'Etude de Projet Economique, organisme suisse de benchmarking économique)
La médiane et la moyenne sont des outils statistiques couramment utilisés pour les comparaisons de salaires. Ces deux outils, qui ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients, devraient être employés de manière complémentaire selon le cadre de l'étude.
La médiane est généralement plus représentative pour l'analyse des petits groupes, car la présence de quelques cas extrêmes peut tirer fortement la moyenne vers le haut ou vers le bas et donner ainsi une image qui n'est pas représentative de la grande majorité des données.
Prenons un exemple simple pour illustrer le phénomène : un groupe de 10 salaires, dont 8 de 1000 € et 2 de 5000 €. La moyenne est 1800 et la médiane de 1000. La moyenne est tirée fortement vers le haut, dans une zone où il n'y a justement pas de salaires. La médiane est par contre représentative de la majorité des salaires analysés.
Dans les grands groupes, de plusieurs dizaines ou centaines de données analysées, la médiane et la moyenne tendent à se confondre. Les dispersions vers le haut et vers le bas tendent à se compenser et d'autre part les cas extrêmes isolés ont peu d'influence sur la moyenne qui est fonction de l'effectif de la population.
Dans les grands groupes, c'est toutefois la médiane qui peut donner une image peu représentative de la réalité. C'est le cas lorsque les groupes analysés sont formés de sous-groupes eux-mêmes assez homogènes, mais bien distincts les uns des autres.
Pour illustrer ce phénomène, prenons à nouveau un cas simple avec deux groupes de 100 salaires. Dans chacun des deux groupes, il y a un sous-groupe de salaires de 2000 € et un sous-groupe de salaires de 3000 € :

Groupe 1	
Salaire	Effectif
2000	60
3000	40
Moyenne : 2400	
Médiane : 2000	

Groupe 2	
Salaire	Effectif
2000	40
3000	60
Moyenne : 2600	
Médiane : 3000	

L'écart entre les moyennes est de 200 soit 4% de la moyenne globale des deux groupes qui est de 2500.
L'écart entre les médianes est de 1000 soit 40% de la médiane globale des deux groupes qui est de 2500.
L'image donnée par les médianes est donc, dans ce cas, fortement biaisé.

L'exemple ci-dessus est évidemment simpliste. Dans son principe, il correspond toutefois bien à certaines analyses statistiques basées sur les médianes, qui sont publiées par des organismes officiels. Ainsi par exemple, l'Office Fédéral de la Statistique (Suisse) publie une statistique des salaires selon le niveau des qualifications requises pour un poste de travail, en comparant les salaires des femmes et des hommes. Cette statistique distingue 4 niveaux de qualifications, des plus exigeantes aux plus simples. Les deux niveaux les plus élevés sont présentés de manière regroupée. Dans la mesure où les proportions de femmes et d'hommes sont probablement inversées entre les deux niveaux de qualifications, il est probable que l'écart calculé sur la base de médianes biaise l'image de la réalité, alors que les moyennes seraient plus représentatives. Cette même critique s'applique encore plus nettement aux comparaisons des salaires médians pour l'ensemble des niveaux de qualifications.

PRIX MEDIAN OU PRIX MOYEN ?

Dans leurs communiqués de presse, la Fédération des chambres immobilières du commentent désormais l'évolution du prix des propriétés en se basant sur le prix médian.
Aux États-Unis, la National Association of Realtors utilise cette mesure depuis longtemps pour rapporter le prix des propriétés.

Extrait du communiqué de presse de la FCIQ :
Voyons pourquoi, en immobilier, la médiane est généralement un meilleur indicateur pour traiter du prix des propriétés que la moyenne.
La médiane est la valeur qui permet de partager une série en deux parties égales.
Dans le cas qui nous intéresse, le prix médian est celui qui indique que la moitié des transactions ont eu cours à un prix inférieur et l'autre moitié à un prix supérieur. Par exemple, un prix médian de 150 000 $ indique que 50 % des propriétés se sont vendues en deçà de 150 000 $ et l'autre 50 % à un prix supérieur.

L’avantage de la médiane comme mesure de tendance centrale est qu’elle n’est pas influencée par les valeurs extrêmes.
À l’inverse, l’inconvénient du prix moyen, comme toute moyenne d’ailleurs, est justement qu’il est influencé par ces valeurs extrêmes, ce qui peut créer des distorsions majeures susceptibles de fausser l’interprétation des données. On n’a qu’à penser à un secteur géographique où le prix des propriétés tourne généralement autour de 150 000 $ à 200 000 $ et où, pour un mois donné, une propriété qui n’est pas représentative du secteur est vendue à 2 000 000 $. Cette transaction vient tirer la moyenne vers le haut et du même coup, la croissance des prix dans ce secteur sera surestimée. Le prix médian, lui, n’est pas influencé par cette transaction à 2 000 000 $. Il donne donc une meilleure lecture du marché, tant en ce qui a trait aux prix qu’au taux de croissance entre deux périodes.
En conclusion, qu’on utilise le prix médian ou le prix moyen, plus le nombre de transactions à partir desquelles ils sont calculés est faible, plus il faut les interpréter avec prudence. La norme à cet effet est d’avoir un minimum de 30 ventes. Sous ce seuil, le risque est très important.

Ce qui précède met en cause la validité de l’utilisation d’une moyenne dans le cas où l’effectif de la population est faible. En effet, plus l’effectif total est faible, plus la moyenne est influencée par les valeurs extrêmes.

ALORS, MEDIANE OU MOYENNE ?

Comme le montrent les exemples précédents, le paramètre central idéal n’existe pas. Tout ce que l’on peut faire c’est essayer de choisir, suivant la situation étudiée, le paramètre central le mieux adapté.
Dans ce but, le statisticien Yule (XIXème siècle) a défini six propriétés souhaitables pour les valeurs centrales et comparé sur ces critères la médiane, la moyenne et le mode. Ces propriétés sont les suivantes :

(1) Etre définie de façon objective
Deux personnes différentes traitant la même information doivent trouver le même résultat en ce qui concerne le calcul des valeurs centrales. Ceci est vrai pour la moyenne et la médiane mais pas pour le mode qui dépend du choix de la partition en classe adoptée.

(2) dépendre de toutes les observations
La modification d'une seule observation doit entraîner une modification de la valeur centrale. Ceci est vrai de la moyenne mais pas du mode et de la médiane.

(3) avoir une signification concrète
Bien que la moyenne paraisse "naturelle" elle est en fait très abstraite alors que le mode peut être défini comme la situation la "plus fréquente" et la médiane comme celle "qui divise en deux la distribution" (un individu sur deux a une valeur inférieure ou supérieure à celle-ci). Le caractère abstrait de la moyenne ressort bien quand on l'applique à des caractères discrets (e.g. que signifie 2.5 enfants par femmes ?)

(4) être simple à calculer
Cette préoccupation du XIXe siècle n'est plus de mise à l'époque des ordinateurs ... Toutes les valeurs centrales sont actuellement simples à calculer.

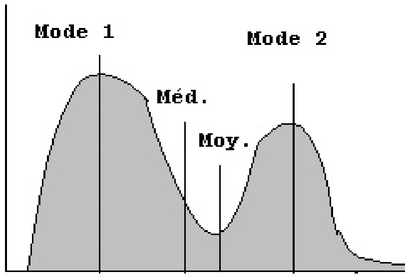
(5) être peu sensible aux fluctuations d'échantillonage
Il s'agit en apparence de l'inverse de la propriété (2). Mais on peut dire que cette propriété définit la robustesse de la mesure face à des erreurs qui peuvent apparaître (données mal codées, valeurs aberrantes). La médiane est la plus trois paramètres.

(6) se prête au calcul algébrique
Lorsque l'on connaît les valeurs centrales de k échantillons *E1...Ek* d'effectifs respectifs *P1...Pk*, peut-on retrouver la valeur centrale de E qui est la réunion de tous ces échantillons ? La réponse est affirmative dans le cas de la moyenne mais négative dans ceux du mode et de la médiane. Ceci est un gros avantage pour le stockage de l'information.
Le tableau ci-dessous permet de résumer les avantages et inconvénients des trois valeurs centrales.

Propriété de Yule	**Mode**	**Mediane**	**Moyenne**
1) est définie de façon objective	-	+	+
2) dépend de toutes les observations	-	-	+
3) a une signification concrète	+	+	-
4) est simple à calculer	+	+	+
5) est peu sensible aux fluctuations d'échantillonnage	-	+	-
6) se prête au calcul algébrique	-	-	+

Ces propriétés n'aident que très peu au choix qui nous intéresse dans cet article.
Après lecture des exemples précédents, il ressort que dans le cas de faibles effectifs la médiane est plus significative que la moyenne car plus l'effectif est faible plus les valeurs extrêmes influent sur la moyenne.

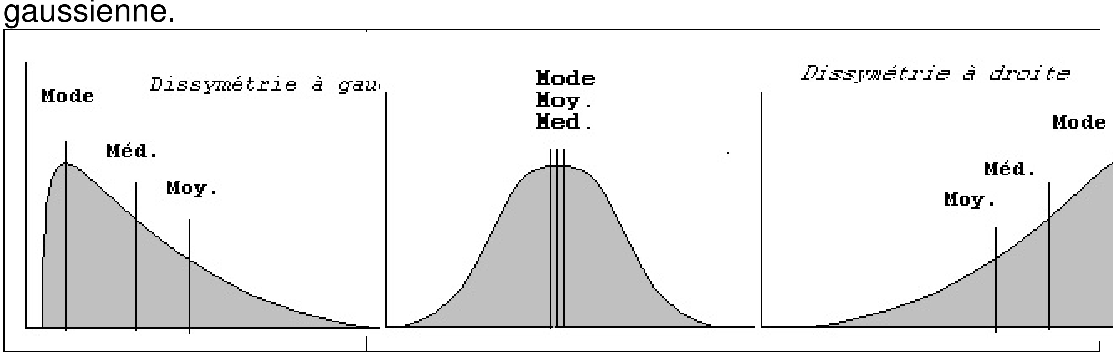
D'autre part, dans le cas d'une distribution multimodale, si l'effectif est faible, nous sommes ramenés au cas précédent sinon, l'exemple 5) (CEPEC) montre que la moyenne est moins biaisée que la médiane et donc plus significative.



Dans la suite, nous nous limiterons aux distributions unimodales.
La médiane induit, de par sa définition, une notion d'ordre ce qui peut être intéressant lorsque la valeur centrale doit permettre de situer une valeur donnée par rapport à l'ensemble de la population.
De plus elle n'est pas sensible aux valeurs extrêmes. (*exemples 1) et 2)*)

Dans le cas d'une distribution unimodale, plus la distribution est symétrique plus la moyenne est significative. Ceci nous amène à étudier les distributions dissymétriques.

Enfin, on peut également remarquer que l'écart entre la moyenne et la médiane est fonction du caractère symétrique de la population étudiée. Cela va jusqu'à l'égalité entre moyenne et médiane pour une distribution gaussienne.



Une remarque s'impose : en cas de dissymétrie, la médiane est toujours plus proche du mode que la moyenne et permet donc de mieux situer une valeur par rapport à l'ensemble.
Nous sommes ainsi ramenés à évaluer la dissymétrie d'une distribution.
Nous disposons pour cela de plusieurs outils plus ou moins simples : le coefficient d'asymétrie de Fisher, le coefficient d'asymétrie de Pearson et le coefficient d'asymétrie de Yule et Kendall (ou de Bowley).

Les deux premiers sont de nature algébrique alors que le dernier (Yule et Kendall), beaucoup plus simple ne fait intervenir que les quartiles de la distribution étudiée :

$$U = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)}$$

Nous aurons toujours : $-1 \leq U \leq 1$ et U est d'autant plus proche de 0 que la distribution est symétrique.
Comme il n'existe pas de critère précis de séparation entre symétrie et asymétrie, il reste à définir des valeurs seuils de ce coefficient permettant choisir entre médiane et moyenne.

Essayons d'appliquer le coefficient d'asymétrie de Yule au choix moyenne-médiane sur les exemples précédents en divisant l'intervalle [-1 ; 1] en trois intervalles de même longueur : [-1 ; -1/3], [-1/3 ; 1/3] et [1/3 ; 1]. Pour se faire, considèrera qu'une série est dissymétrique à gauche si U $\in$[-1 ; -1/3], dissymétrique à droite si U $\in$[1/3 ; 1] et symétrique si U $\in$[-1/3 ; 1/3].

Cas de l'exemple 1 : Q_1 = 6 ; Q_2 = Me = 6 ; Q_3 = 7 et $U = \frac{(7-6)-(6-6)}{(7-6)+(6-6)}$ = 1
D'après l'étude précédente, la série est considérée comme dissymétrique à gauche. Le paramètre central le plus significatif est donc la médiane.

Cas de l'exemple 2 : Q_1 = 6 ; Q_2 = Me = 8 ; Q_3 = 14 et $U = \frac{(14-8)-(8-6)}{(14-8)+(8-6)}$ = 1/2
Ici, *$U \in$ [1/3 ; 1]* donc la série est considérée comme dissymétrique à gauche. Le paramètre central le plus significatif est donc, ici encore, la médiane.

CONCLUSION

D'après ce qui précède, nous pouvons à présent donner quelques indications permettant de choisir de façon pertinente entre la moyenne ou la médiane d'une série statistique.

Critère 1 :
Lorsque le caractère étudié est de type ordinal, la médiane est, dans tous les cas, préférable à la moyenne.

Critère 2 :
Lorsque le caractère étudié n'est pas de type ordinal, le coefficient de dissymétrie de Yule-Kendall (ou de Bowley), noté U, peut être utilisé de la façon suivante :
Si $-1 \leq U \leq -\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} \leq U \leq 1$ **alors** la médiane est préférable à la moyenne
Sinon la moyenne est préférable à la médiane.

RACINE CARREE D'UN PRODUIT

Michaël Durançon, Françoise Guy, Jérôme Loubatières,
Roseline Marques, Yves Piau.
IRES de Toulouse-Groupe Didactique des Mathématiques

Résumé
Ce document est l'aboutissement d'une recherche effectuée par le Groupe Didactique des Mathématiques de l'IRES de Toulouse.
L'objectif de cette recherche est d'établir et de motiver les propriétés algébriques des racines carrées et leur utilisation en classe de Troisième.
Nous avons élaboré une fiche élève dont l'objectif était de faire découvrir l'identité $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$. *Cette fiche élève a été expérimentée dans plusieurs classes de Collège puis modifiée en fonction des résultats obtenus.*

Mots Clés
Racine Carrée, Théorème de Pythagore, A.E.R.

Après une analyse des programmes de Collège et une réflexion didactique, il nous a semblé plus judicieux de faire découvrir par les élèves l'égalité $\sqrt{(a^2b)} = a\sqrt{b}$ (pour deux nombres a et b positifs), plutôt que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ égalité moins immédiate.
Une fiche élève a été expérimentée dans plusieurs classes de Collège, puis modifiée en fonction des résultats obtenus. Le compte rendu de cette expérimentation peut être consulté sur le site de l'IRES de Toulouse (Groupe Didactique) et dans la brochure IREM n°184 « Racine carrée d'un produit ».

L'analyse des différentes expérimentations nous a amenés à scinder l'activité en deux parties :

- un travail préalable à la maison
- une fiche élève pour un travail en classe qui se concentre sur l'activité visée, à savoir l'égalité $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.

Travail préparatoire à l'activité Racine Carrée

1. On considère un triangle dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm. Vérifiez que ce triangle est rectangle.

2. On considère maintenant un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 10 cm et dont un côté de l'angle droit mesure 6 cm. Calculez la mesure de l'autre côté de l'angle droit.

3. On considère maintenant un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 30 cm et dont un côté de l'angle droit mesure 18 cm. Calculez la mesure de l'autre côté de l'angle droit.

4. A partir des résultats précédents, émettez une conjecture.

5. Dans les questions suivantes k est un nombre positif.

a) On considère maintenant un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 5k cm et dont un côté de l'angle droit mesure 3k cm. Calculez la mesure de l'autre côté de l'angle droit en fonction de k.

b) Plus généralement, on considère maintenant un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure c cm et dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b cm. Soit un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure kc cm, et un côté de l'angle droit mesure ka cm. Calculez alors la mesure de l'autre côté de l'angle droit en fonction de b.

Fiche Elève (Travail en classe)

Dans cette activité, les calculatrices ne sont pas autorisées.

1. Vérifiez que 1,5 est la racine carrée de 2,25.

2. Pouvez-vous proposer maintenant une valeur pour $\sqrt{225}$ et pour $\sqrt{22500}$?

Justifiez votre réponse.

3. Pouvez-vous en déduire la valeur de $\sqrt{20{,}25}$?

Sinon, vous retrouverez cette question en fin d'activité.

4. On considère plusieurs triangles rectangles.

Complétez le tableau suivant :

Hypoténuse	Côté 1	Côté 2
4	3	
8	6	
12	9	
3	2	
15	10	
30	20	
2,5	2	
7,5	6	
25	20	

5. Pouvez-vous maintenant répondre à la question **3.** ?

Conclusion

Cette activité très riche a donné l'occasion aux élèves de ‘’faire des mathématiques’’ et leur a permis de comprendre le passage d'une écriture à une autre pour un même nombre.

Un des temps fort de l’activité est la question **4.** où les élèves sont conduits à remplir le tableau suivant pour des triangles rectangles :

Hypoténuse	Côté 1	Côté 2
3	2	$\sqrt{5}$
15	10	
30	20	

Les élèves ayant calculé le deuxième côté à l’aide du Théorème de Pythagore pour le premier triangle, proposent d’eux-mêmes d’utiliser un résultat préalablement établi qui leur permet de donner directement les résultats des deux dernières cases sous la forme : $5\sqrt{5}\ et\ 10\sqrt{5}$ au lieu de $\sqrt{125}\ et\ \sqrt{500}$ qu’ils auraient obtenus par l’application du théorème de Pythagore.

Il nous semble que l’appropriation de l’égalité $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ est alors effective.

VIVENT LES JEUX

Gérard MARTIN, Nicole ABADIE,

Jean-Pierre ABADIE, Claudine BERTHOUMIEUX

IRES de Toulouse-Groupe Jeux Mathématiques

mar.ge@wanadoo.fr

Résumé
L'article essaie de répondre à la question : l'Atelier Jeux Mathématiques de l'IRES de Toulouse : ça sert à quelque chose ?
Mots clés
Atelier jeux mathématiques, témoignages, évaluation

L'Atelier Jeux Mathématiques

Nos multiples activités sont en direction des établissements scolaires surtout les écoles mais aussi les collèges et lycées.
Nous assurons aussi des animations Grand Public.

Nous accueillons des classes
- Pendant la semaine de la Fête de la Science, environ 1500 élèves sont accueillis dans plusieurs villages des Sciences (Ariège, Aveyron, Gers).
- Durant deux semaines dont la semaine nationale des mathématiques, nous recevons à l'Université Paul Sabatier, des classes (près de 3000 élèves) du CE2 aux classes de lycées (85 classes d'écoliers, 46 classes de collégiens et 2 de lycéens).

Les mallettes jeux peuvent être empruntées par les établissements scolaires. Par exemple en 2014-2015 les mallettes cycle 3-collège ont été prêtées 13 fois par des collèges et 35 fois par des écoles, et celles de cycle 2, 28 fois.

On peut se demander quel est l'impact de ces actions. L'évaluation est difficile mais nous avons un premier élément d'appréciation dans le fait que les emprunts de mallettes sont de plus en plus nombreux. Ensuite certains établissements en redemandent années après années et les inscriptions aux animations sont closes de plus en plus tôt avec des classes qui sont refusées.

De plus, nous avons des témoignages d'utilisateurs.

Pour les écoliers, voici quelques exemples venus d'une classe de CM1-CM2 pour laquelle l'enseignante avait emprunté la mallette. Nous avons gardé toute leur spontanéité y compris dans l'orthographe !!!

Je vous remera pour les jeux de Mathématique
on vous, remerci tous coeur merci beaucoup
pour les jeux sa nous a fait
comprendre que lont pouver réféchire et de
calme et de silence.

Merci pour avoir créé ces jeux j'ai adorée le carré de l'hypothenuse
et le cube jaune c'était bien parceque manipuler ca nous changere
d'écrire

Je vous remercie d'avoir rapporter les jeux mathématique pour nous. Moi j'ai adoré les jeux on s'est bien amusé et sa réfléchi la tête. Tous le monde à réussi tout les jeux mathématique. Je vous remercie à bientôt.

Merci d'avoir crée ces jeux et surtout le jeux la Piramydes azte merci encore. Vos jeux était super amusans pour les réussire il faut ce consentrer.

Je vous remercie d'avoir crée des jeux pour les élèves. Grâce à vos jeux je me suis rendue compte qu'il fallait être tenace et ne pas se distraire par les autres. Mercie.

Les thèmes qui reviennent le plus souvent dans ces témoignages sont la ténacité et la réflexion mais aussi le plaisir.

Nous avons également des témoignages d'enseignants qui avaient amené leur classe à l'animation de Paul Sabatier.

« C'est avec grand plaisir que je vous ai revus cette année aux ateliers jeux mathématiques. Cela fait maintenant plus de 10 ans et on ne vous félicite pas assez pour tout le travail que vous effectuez et tout ce que cela apporte aux enfants. Je vous écris également pour avoir les fichiers des jeux et continuer ce travail dans nos classes. »

Ecole les Tibaous Toulouse.

« Je suis venue ce matin avec ma classe à l'atelier JEUX MATHEMATIQUES;
Je tiens à vous remercier encore pour la qualité des activités proposées.
Tous les élèves étaient ravis. Tous ont bien travaillé grâce à vous. »

Ecole Olympe de Gouges Toulouse.

« Tout d'abord je souhaiterais vous remercier pour l'accueil d'hier. Je me suis rendue avec une classe de CM1-CM2 à l'université Paul Sabatier. Mes élèves se sont vraiment investis dans les jeux, et beaucoup étaient surpris de savoir que certains faisaient aussi appel à des compétences mathématiques. Certains jeux sont très populaires, et les élèves aimeraient avoir certains jeux en classe pour jouer en autonomie. »

Ecole de Mondavezan.

« Nous vous remercions encore une fois pour cette excellente matinée passée à nous creuser les méninges!!! Nous avons beaucoup aimé vos jeux!
Merci pour votre engagement auprès des plus jeunes ! »

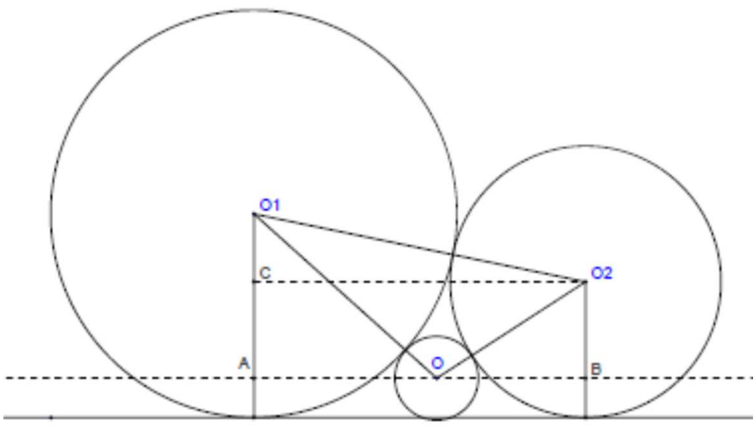
Ecole Jean Jaurès Ramonville Saint-Agne.

Comme vous avez pu le constater dans ces témoignages : ça vaut la peine de continuer !

Ressources du Site de l'IRES

Les fichiers correspondants à tous les jeux (matériel utilisé, fiches, corrigés avec quelques indications pédagogiques) sont disponibles sur le Site de l'IRES Toulouse.

Les trois cercles



Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

Chaque cercle est tangent aux deux autres :

$\mathcal{C}_1$ de centre O_1 et de rayon R_1.

$\mathcal{C}_2$ de centre O_2 et de rayon R_2.

$\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R, est le cercle le plus petit.

Dans le triangle AOO_1 rectangle en A :

$O_1A = R_1 - R$, $O_1O = R_1 + R$ et on pose $d_1 = OA$

L'application du théorème de Pythagore donne $O_1O^2 = O_1A^2 + AO^2$ relation qui équivaut à

$(R_1 + R)^2 = (R_1 - R)^2 + d_1^2$ qui équivaut à $d_1^2 = 4RR_1$ qui équivaut enfin à : $d_1 = 2\sqrt{RR_1}$ **(1)**

Dans le triangle BOO_2 rectangle en B :

$O_2B = R_2 - R$, $O_2O = R_2 + R$ et on pose $d_2 = OB$

L'application du théorème de Pythagore donne $O_2O^2 = O_2B^2 + BO^2$ relation qui équivaut à

$(R_2 + R)^2 = (R_2 - R)^2 + d_2^2$ qui équivaut à $d_2^2 = 4RR_2$ qui équivaut enfin à : $d_2 = 2\sqrt{RR_2}$ **(2)**

Dans le triangle CO_1O_2 rectangle en C :

$O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_1C = R_1 - R_2$ et on pose $d = O_2C = d_1 + d_2$

L'application du théorème de Pythagore donne $O_1O_2^2 = O_1C^2 + O_2C^2$ relation qui équivaut à

$(R_1 + R_2)^2 = (R_1 - R_2)^2 + d^2$ qui équivaut à $d^2 = 4R_1R_2$ qui équivaut enfin à : $d = 2\sqrt{R_1R_2}$ **(3)**

En rassemblant **(1)**, **(2)** et **(3)** on obtient : $\sqrt{RR_1} + \sqrt{RR_2} = \sqrt{R_1R_2}$ relation que l'on divise par $\sqrt{RR_1R_2}$ pour établir la relation à démontrer, à savoir :

$$\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

Groupes de recherche de l'IRES

Titre du groupe	Responsable du groupe
Ecole Primaire	Isabelle LAURENÇOT-SORGUS
Premier Cycle	Julie VAN DER HAM, Florence LARUE
Lycée	Hussein HAMMOUD
Lycée professionnel	Hamid HADIDOU
Apprendre Ensemble	Christophe RABUT
Didactique des mathématiques	Jérôme LOUBATIÈRES
Évaluation	André ANTIBI
Géométrie dynamique	Jean-Jacques DAHAN
Hippocampe	Julio REBELO
Jeux mathématiques	Gérard MARTIN
Maths en Jeans	Arnaud CHERITAT
Maths et internet	Abdel SARRAF
Maths-Physique Supérieur	Pierre ANGLÈS
Rallye mathématique sans frontières	André ANTIBI
Rallye Sciences Expérimentales	Xavier BUFF
Statistique et probabilités	Brigitte CHAPUT
Histoire des Mathématiques	Guillaume LOIZELET
Enseignement interactif	Jean-François PARMENTIER
Enseigner les maths en LSF langue des signes	Emily BURGUNDER
Esprit critique, science et média	Dominique LARROUY, Philippe HUBERT
SIM Smartphones et Instruments de mesure	Patrice MARCHOU
RoMenSes Rôle de Maths dans l'Enseignement des Sciences Economiques et Sociales	Etienne FIEUX
Numérique	Christophe GOMBERT

Voici enfin arrivé le numéro 2 de notre bulletin L'Autan moderne. De nombreux lecteurs le demandaient depuis plusieurs mois. Nous pensons, vu l'augmentation de l'activité au sein de l'IRES, publier très prochainement le numéro 3. En effet l'IRES se développe et plusieurs groupes de sciences non mathématiques sont créés, et même si ce numéro 2 comporte des articles en mathématiques essentiellement, les prochains numéros couvriront bien plus de domaines.
L'IRES de Toulouse est le seul IRES de France, l'initiative prise il y a maintenant trois ans s'avère extrêmement fructueuse et prometteuse. Cela pour une seule fin, apporter notre contribution à cet immense édifice qu'est l'enseignement des sciences dans notre région et en France.

maquette couverture / conception BV - IRES Toulouse / janvier 2018

L'**Autan Moderne** est une publication de l'IRES de Toulouse IRES UFR FSI Université Toulouse 3 Paul Sabatier 31062 TOULOUSE cedex 9 *courriel : ires@univ-tlse3.fr*	Directeur de publication **Xavier BUFF** Chargé de la publication **Hussein HAMMOUD**	Autan Moderne n°2 *Janvier 2018* ISBN : 978-2-918013-09-9 EAN : 9782918013099