# L'Autan moderne

Bulletin de l'Institut de Recherche pour l'Enseignement des Sciences de Toulouse





#### Membres du Conseil d'Administration de l'IRES

Année 2015

#### Animateurs IRES

ACED Jean-Luc

**BILLY Christophe** 

**BRESSAUD Xavier** 

**BUFF** Xavier

**CASTRO Jean-Paul** 

**CHAPUT Brigitte** 

**FAJERWERG Katia** 

**HUBERT Philippe** 

**HADIDOU** Hamid

**HAMMOUD** Hussein

LARROUY Dominique

**LARUE Florence** 

LAURENCOT-SORGIUS Isabelle

LOUBATIERES Jérôme

**RABUT Christophe** 

**TOQUEC Bertrand** 

#### • BIATSS IRES

**LOVATO** Josette

#### Rectorat

BLAU Danielle (IA IPR Maths)

BRINGUIER Georges (IEN. ET-EG)

**DARRAULT Carol (IA IPR STI)** 

FRESSIGNAC Bernard (IA adjoint Aveyron)

MARCHOU Patrice (IA IPR Sciences Physiques)

MATHEVET Armelle (IA IPR SVT)

#### Directeur FSI

**BROTO Jean-Marc (Directeur FSI)** 

IRES UFR FSI Université Toulouse 3 Paul Sabatier 31062 TOULOUSE cedex 9 courriel : ires@univ-tlse3.fr

L'Autan moderne Janvier 2015

ISBN: 978-2-918013-08-2 EAN: 9782918013082

# Table des matières

Notes aux auteurs
Comité de lecture
Compte rendu d'un travail interdisciplinaire Maths-Sciences Physiques
Brigitte CHAPUT, Hamid HADIDOU, Christine DUCAMP
Une introduction à la fonction inverse en classe de Seconde
C DENUX, R MARQUES, Y PIAU, JP LOUBATIERES, M DURANCON27
Médiane et Quantiles
Hussein HAMMOUD33
D'Engel à Euler
François BERTRAND43
Les Ouvrages de Mathématiques dans l'Histoire – Compte rendu de lecture
Maryvonne SPIESSER47
Hommage à Claude FRASNAY, premier directeur de l'IREM
Pierre ANGLES54

# Notes aux auteurs

Pour assurer l'uniformité de la mise en page et la présentation, l'article doit être écrit en :

Police: Arial

Taille: 12

Interligne: entre 1 et 1,5

Marges haut, bas et droite : 3 cm

Marge à gauche : 3,5 cm

Gros titre: taille 18

Sous-titre: taille 16

Mentionner en tête de l'article la liste de <u>tous les auteurs</u>, ainsi que l'institution de rattachement, avec si possible, une adresse électronique de l'un des auteurs.

L'article doit être proposé en traitement de texte <u>compatible Word</u> (afin de faciliter la mise en page, éviter Latex ...). Fournir également une version en fichier pdf. La nécessité de la mise en page peut amener les coordonateurs à modifier la présentation.

L'article doit comporter entre une et une vingtaine de pages y compris les annexes. Chaque article doit être précédé d'un résumé d'une dizaine lignes au maximum et de quelques mots clés. Il faut envoyer les articles à

hussein.hammoud@ac-toulouse.fr

Conformément aux règles éditoriales, l'auteur reste le seul responsable du contenu de son l'article et des idées qu'il expose.

# A propos de ce bulletin

Pour tous ceux qui sont rattachés et attachés à l'IRES de Toulouse, l'existence d'un bulletin périodique marque une étape importante dans la vie de l'institut. Le bulletin constitue un outil de diffusion privilégié et un catalyseur de l'activité en son sein, et par conséquent contribue à sa reconnaissance. De plus, le bulletin est un formidable moyen fédérateur de l'ensemble des animateurs, en vertu de l'adage "l'union fait la force".

Jadis, notre bulletin de l'IREM s'intitulait "Le Fil d'Ariane". Il y a quelques années, ce nom devenait "L'Autan" et ce, jusqu'à sa dernière publication, il y a six ans.

Aujourd'hui, suite aux efforts déployés par Xavier BUFF notre directeur pour élargir l'IREM à l'IRES, autrement dit à toutes les sciences, "L'Autan" revient à la vie sous le nom de "L'Autan moderne".

"L'Autan moderne" ne pourra vivre que par ses lecteurs et ses auteurs. L'ensemble des animateurs, et les personnes attachées à notre institut, peuvent proposer à la publication l'article de leur choix, dans le thème de leur choix. L'article pourrait par exemple relater une expérience pédagogique, une activité scolaire ou universitaire, commenter un ouvrage, critiquer les programmes ou en proposer une certaine vision, proposer des jeux ou des défis, etc. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Il n'y a donc aucune restriction ou contrainte concernant le contenu, outre celle du rapport de l'article avec l'enseignement des sciences.

HH & HH

# Compte rendu d'un travail interdisciplinaire mathématiques-sciences physiques fonctions, statistique et hydrostatique

Brigitte CHAPUT, Hamid HADIDOU - IRES de TOULOUSE Christine DUCAMP - ENFA TOULOUSE

#### <u>Résumé</u>

Bien souvent, à la suite d'expériences en sciences physiques, les élèves considèrent que le résultat obtenu est "vrai" ou "unique". Aussi, lorsqu'ils étudient l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre et reportent les résultats sur un graphique, ils relient systématiquement les points par des segments de droite.

Dans ce travail, à travers l'étude en sciences physiques, de l'évolution de la pression en un point d'un liquide en fonction de la hauteur de ce liquide, nous avons tenté de sensibiliser les élèves à l'incertitude liée à toute mesure et de les amener à chercher un modèle mathématique qui traduit au mieux les résultats. Ici il s'agit du modèle linéaire.

Une étude statistique a permis d'établir le lien avec les indicateurs statistiques (moyenne et écart-type). Cela a conduit à donner du sens à ces indicateurs et à comprendre comment les interpréter.

#### Mots-clés

pression en un point d'un liquide, régression linéaire, incertitude de mesure, simulation, moyenne, écart type.

Cet article est le compte rendu d'un travail pluridisciplinaire mathématiquessciences physiques mené dans une classe de Première Professionnelle, option électrotechnique, énergie et équipements communicants. Les objectifs visés dans ce travail sont :

- le réinvestissement des connaissances de collège et de seconde,
- la sensibilisation des élèves à la régression linéaire qui sera étudiée en Terminale Professionnelle.
- la sensibilisation des élèves à l'incertitude attachée à toute mesure expérimentale.

Ces objectifs sont en accord avec ceux des baccalauréats professionnels, cités dans le préambule du Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale spécial n°2 du 19 février 2009, notamment :

la préparation à la poursuite d'étude,

 le développement des attitudes transversales : sens de l'observation, ouverture à la communication, au dialogue et au débat, esprit critique vis-à-vis de l'information disponible.

La démarche pédagogique adoptée met en œuvre l'analyse, la recherche, la découverte, l'exploitation et la synthèse des résultats. Elle s'appuie sur les points suivants du préambule :

- 1 Prendre en compte la bivalence
- 2 Privilégier la démarche d'investigation
- 3 S'appuyer sur l'expérimentation
- 8 Intégrer les TIC dans les apprentissages
- 9 Mettre l'élève au travail, individuellement ou en groupe

Le travail s'est déroulé en plusieurs étapes :

- le TP1 (voir Annexe 1) sur la mesure de pression, réalisé par 22 élèves et dont les 22 séries de résultats ont été regroupées,
- un travail d'analyse de la variabilité de ces résultats,
- le TP2 (voir Annexe 2) sur le remplissage d'une éprouvette avec 25 mL d'eau qui met en évidence la fluctuation de mesure dans des conditions de répétabilité (même manipulateur, mêmes conditions matérielles...),
- un travail d'analyse des résultats,
- un retour sur le TP1 et une première approche de la régression linéaire,
- un prolongement du travail sur la prise en compte des incertitudes de mesures aussi bien pour la détermination de la pression, que pour la mesure de la hauteur d'eau.

# **Descriptif du TP1** (voir annexe 1)

Le TP1 de cette étude fait partie du tronc commun du programme des classes de première et terminale des baccalauréats professionnels dont le programme de sciences physiques et chimiques est organisé autour de quatre thèmes<sup>1</sup>.

lci il s'agit du thème des Transports (T) et plus précisément du paragraphe 2 : Pourquoi les hublots des sous-marins sont-ils épais ? du chapitre T 5 intitulé : Comment se déplacer dans un fluide ?

Les objectifs du TP sont les suivants :

- Mesurer la pression d'un liquide en un point
- Déterminer expérimentalement les variations de pression dans un fluide
- Distinguer pression atmosphérique, pression relative et pression absolue
- Utiliser la formule  $P_B P_A = \rho.g.h$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Bulletin officiel spécial n°2 du 19 février 2009

Ce TP est précédé d'une séance de trois activités expérimentales, intitulée *Pression et forces pressantes* au cours de laquelle sont introduites les notions de pression, de force pressante et de surface pressée. La dernière activité de la séance est consacrée à la pression dans un liquide. Une expérience (photo ci-

contre) avec une bouteille en plastique percée à différentes profondeurs et remplie d'eau, permet aux élèves de dégager qualitativement quelques caractéristiques de la force pressante.

On constate en particulier que "plus la profondeur augmente plus la pression augmente".

À ce stade la plupart des élèves sont souvent tentés de conclure hâtivement que "La pression est proportionnelle à la profondeur".



# Commentaires sur le déroulement du TP1 (voir annexe 1)

**Activité 1**: Discussion et échanges à partir des questions ouvertes.

#### Activité 2:

Au cours de cette activité, les élèves peuvent utiliser le matériel s'ils le souhaitent. Il leur est demandé de rédiger individuellement le protocole expérimental, cette tache leur paraît souvent difficile!

Il s'ensuit une mise en commun, par groupe, pendant laquelle le professeur insiste sur les détails du protocole et les conditions de l'expérience.

#### Activité 3 : Réalisation du TP

À la fin de la première partie, après avoir placé les points dans le repère, certains élèves relient ces points par des segments de droites.

A la question 5) de cette partie et après débat, on arrive aux conclusions suivantes :

- Le nuage de points peut être modélisé par une droite qui passe par l'origine du repère.
- C'est la différence de pression et non la pression qui est proportionnelle à la profondeur. Ici, le professeur introduit le vocabulaire concernant la pression absolue et la pression relative.

C'est à la suite de cette partie que l'étude statistique qui fait l'objet de cet article, est menée avec les élèves par groupes en accompagnement personnalisé.

Dans un deuxième temps, le travail se poursuit en cours de sciences physiques pour arriver à la relation générale :  $P_B - P_A = \rho . g. h$ .

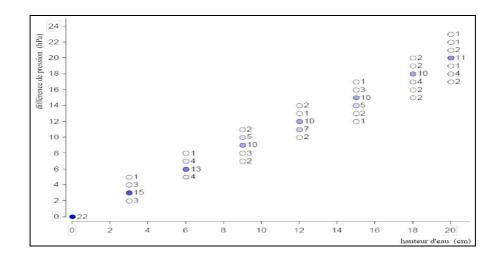
# Bilan du TP1

Le tableau ci-dessous donne les différences de pression à différentes hauteurs d'eau relevées par 22 élèves. Les hauteurs sont exprimées en centimètres et les différences de pression en hectopascals.

Hauteurs	Δр										
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	3	4	2	3	3	3	3	3	3	3
6	5	5	7	5	6	6	6	6	7	6	6
9	10	8	10	7	9	9	9	9	9	9	8
12	12	11	14	10	11	12	12	12	12	11	11
15	16	13	17	13	15	15	15	15	15	14	14
18	19	15	20	16	18	18	18	18	18	16	17
20	21	17	22	18	20	20	20	20	20	18	18

Hauteurs	Δр										
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	3	5	4	3	3	3	2	4	2	3
6	6	6	8	7	6	6	6	6	7	5	6
9	9	11	10	10	9	9	8	9	10	7	11
12	12	12	11	14	12	12	11	11	13	10	12
15	15	15	14	16	15	15	14	14	16	12	15
18	18	18	17	20	18	18	17	17	19	15	18
20	20	20	20	23	20	20	19	18	21	17	20

La représentation des données recueillies par un nuage de points pose le problème de la superposition de plusieurs points. Nous avons opté pour la représentation suivante : chaque disque correspond à une mesure, il est plus ou moins foncé selon que la valeur associée est plus ou moins fréquente, les effectifs des valeurs représentées sont indiqués à côté.



Pourquoi les résultats associés à une même profondeur sont-ils différents ? Les élèves formulent des réponses en termes de différence de manipulation :

**Matériels différents** : règles, éprouvettes, pressiomètres électroniques, résolution des appareils...

**Manipulateurs différents** : perceptions visuelles différentes, dextérités différentes pour l'alignement du niveau d'eau du tube du pressiomètre avec la graduation de la règle...

Que ce serait-il passé si les mesures avaient été effectuées toutes avec le même matériel par le même manipulateur ?

Réponse possible : résultats identiques !

## <u>Incertitude de mesure et comment la quantifier ?</u>

Lorsqu'on effectue une mesure, on ne peut pas être absolument sûr du résultat. Une incertitude est attachée au résultat.

Cette incertitude traduit la dispersion des résultats obtenus. Pour la plupart des mesures, la distribution des résultats peut se modéliser avec une loi normale décrite par ses deux paramètres : moyenne Erreur! et écart-type  $\sigma$  :

- environ 68 % des observations se situent dans l'intervalle [Erreur !  $-\sigma$  ; Erreur !  $+\sigma$ ] ;
- environ 95 % des observations se situent dans l'intervalle [Erreur! 2  $\sigma$ ; Erreur! + 2  $\sigma$ ] (cet intervalle est une approximation de l'intervalle [Erreur! 1,96  $\sigma$ ; Erreur! + 1,96  $\sigma$ ] que l'on trouve couramment);
- environ 99,7 % des observations se situent dans l'intervalle [Erreur! 3  $\sigma$ ; Erreur! + 3  $\sigma$ ].

On utilise alors l'écart type de la distribution des résultats pour préciser l'incertitude d'un résultat de mesurage. L'incertitude peut avoir plusieurs sources, l'objectif du TP suivant est d'évaluer l'incertitude lié au manipulateur lors d'une mesure.

## **Descriptif du TP2** (voir annexe 2)

Le TP2 vise à évaluer l'incertitude attachée à un manipulateur pour le remplissage d'une éprouvette avec 25 mL d'eau distillée. Nous avons utilisé une éprouvette en la détournant de son utilisation classique pour des raisons pratiques, la manipulation proposée est plus simple qu'avec de la verrerie jaugée (séchage plus rapide, par exemple). Le but n'était pas de calibrer l'éprouvette mais de sensibiliser les élèves à l'incertitude attachée à un manipulateur opérant dans des conditions de répétabilité (même manipulateur, même matériel, mêmes conditions expérimentales...).

## Bilan du TP2

Les résultats des élèves sont saisis dans un classeur Excel, disponible à l'adresse <a href="http://www.irem.ups-tlse.fr/spip/spip.php?rubrique48">http://www.irem.ups-tlse.fr/spip/spip.php?rubrique48</a>

Voici par exemple ceux de deux binômes d'élèves de deux classes différentes

Température Masse volumique									
23,1	° C	994,37	g/L						
Essai	Masse verrerie vide (g)	Masse verrerie et eau (g)	Masse eau (g)	Volume eau (mL)					
1	22,43 g	47,22 g	24,79 g	24,93 mL					
2	22,48 g	47,47 g	24,99 g	25,13 mL					
3	22,47 g	47,42 g	24,95 g	25,09 mL					
4	22,49 g	47,19 g	24,70 g	24,84 mL					
5	22,48 g	47,57 g	25,09 g	25,23 mL					
			Moyenne	25,04 mL					
			Ecart-type corrigé	0,16 mL					
			Ecart-type corrigé	0,16 mL					
Temnératur	e		Ecart-type corrigé	0,16 mL					
Températur 22 4		Masse volumique		0,16 mL					
22,4	° C	Masse volumique 994,63	g/L						
22,4 Essai	° C Masse verrerie vide (g)	Masse volumique 994,63 Masse verrerie et eau (g)	g/L Masse eau (g)	Volume eau (mL)					
22,4 Essai	° C  Masse verrerie vide (g)  22,53 g	Masse volumique 994,63 Masse verrerie et eau (g) 47,91 g	g/L Masse eau (g) 25,38 g	Volume eau (mL) 25,52 mL					
22,4  Essai  1 2	° C  Masse verrerie vide (g)  22,53 g  22,49 g	Masse volumique 994,63 Masse verrerie et eau (g) 47,91 g 47,36 g	g/L  Masse eau (g)  25,38 g  24,87 g	Volume eau (mL) 25,52 mL 25,00 mL					
22,4  Essai  1  2  3	° C  Masse verrerie vide (g)  22,53 g  22,49 g  22,53 g	Masse volumique 994,63  Masse verrerie et eau (g) 47,91 g 47,36 g 47,15 g	g/L  Masse eau (g)  25,38 g  24,87 g  24,62 g	Volume eau (mL) 25,52 mL 25,00 mL 24,75 mL					
22,4  Essai  1  2  3  4	* C  Masse verrerie vide (g)  22,53 g  22,49 g  22,53 g  22,50 g	Masse volumique 994,63 Masse verrerie et eau (g) 47,91 g 47,36 g 47,15 g 47,38 g	g/L  Masse eau (g)  25,38 g  24,87 g  24,62 g  24,88 g	Volume eau (mL) 25,52 mL 25,00 mL 24,75 mL 25,01 mL					
22,4  Essai  1  2  3	° C  Masse verrerie vide (g)  22,53 g  22,49 g  22,53 g	Masse volumique 994,63  Masse verrerie et eau (g) 47,91 g 47,36 g 47,15 g	g/L  Masse eau (g)  25,38 g  24,87 g  24,62 g	Volume eau (mL) 25,52 mL 25,00 mL 24,75 mL					
22,4  Essai  1  2  3  4	* C  Masse verrerie vide (g)  22,53 g  22,49 g  22,53 g  22,50 g	Masse volumique 994,63  Masse verrerie et eau (g) 47,91 g 47,36 g 47,15 g 47,38 g 47,46 g	g/L  Masse eau (g)  25,38 g  24,87 g  24,62 g  24,88 g  24,92 g	Volume eau (mL) 25,52 mL 25,00 mL 24,75 mL 25,01 mL 25,05 mL					
22,4  Essai  1  2  3  4	* C  Masse verrerie vide (g)  22,53 g  22,49 g  22,53 g  22,50 g	Masse volumique 994,63  Masse verrerie et eau (g) 47,91 g 47,36 g 47,15 g 47,38 g 47,46 g	g/L  Masse eau (g)  25,38 g  24,87 g  24,62 g  24,88 g	Volume eau (mL)  25,52 mL  25,00 mL  24,75 mL  25,01 mL  25,05 mL					

# Interprétation et communication des résultats

Les mesurages donnent des résultats qui se répartissent selon une distribution théorique qui peut être considérée comme normale (vu le contexte expérimental), d'espérance mathématique V et d'écart type  $\sigma$ .  $\sigma$  quantifie la dispersion des mesures autour de V.

Le problème est qu'on ne connaît pas V et qu'on cherche à l'évaluer.

Si on ne dispose que d'une seule mesure v du volume, on fait confiance au hasard et on admet dans ce cas que la mesure trouvée v est :

- pour un niveau de confiance de 95 % à moins de deux écarts types de distance de V
- pour un niveau de confiance de 68 % à moins d'un écart type de distance de V du fait de la modélisation de la distribution des mesures par une loi normale.

Ainsi, pour un niveau de confiance de 95 %, on admet que v appartient à l'intervalle  $[V-2\ \sigma\ ; V+2\ \sigma]$ . Ce qui traduit aussi le fait qu'on admet que V appartient à l'intervalle  $[v-2\ \sigma\ ; v+2\ \sigma]$ .

 $[v-2 \ \sigma \ ; \ v+2 \ \sigma]$  est un intervalle de confiance de V au niveau de confiance de 95 % (ou au seuil de confiance de 5 %).

De la même façon,  $[v - \sigma; v + \sigma]$  est un intervalle de confiance de V au niveau de confiance de 68 % (ou au seuil de confiance de 32 %).

Les résultats des deux binômes d'élèves précédents s'expriment sous la forme suivante : À la température de 23,1 °C.

 $V_{\text{\'e}prouvette} = (25,04 \pm 0,32) \text{ mL}$  à 95 % de confiance.

 $V_{\text{éprouvette}} = (25,04 \pm 0,16) \text{ mL}$  à 68 % de confiance.

À la température de 22,4 °C.

 $V_{\text{\'e}prouvette} = (25,07 \pm 0,56) \text{ mL}$  à 95 % de confiance.

 $V_{\text{éprouvette}} = (25.07 \pm 0.28) \text{ mL}$  à 68 % de confiance.

# Pourquoi l'écart type corrigé ?

Si on pouvait faire toutes les réalisations possibles des 4 étapes du T.P. précédent, les résultats du calcul du volume d'eau fluctueraient avec un certain écart type, noté  $\sigma$ , qui mesure la dispersion autour de leur moyenne V.

Dans le cadre du T.P., on ne réalise que 5 fois l'expérience, on obtient un échantillon de 5 mesures (parmi l'infinité précédente). Cet échantillon a une moyenne Erreur! et une variance  $\sigma Erreur$ !. En considérant tous les échantillons de 5 expériences possibles :

- la moyenne des moyennes Erreur! des échantillons de taille 5, serait V,
- $\ensuremath{\text{@}}$  la moyenne des variances  $\sigma_{\text{\'e}\text{ch.}}^2$  des échantillons de taille 5, serait  $\frac{4}{5}\sigma^2$

La théorie de l'échantillonnage montre que dans le cas d'échantillons de taille n, la moyenne des variances d'échantillon est  $\frac{n-1}{n}\sigma^2$  (ici n=5).

On cherche ainsi une caractéristique de la dispersion calculée sur les échantillons, qui ait pour moyenne  $\sigma^2$  (et pas  $\frac{4}{5}\sigma^2$ ). Pour cela, on corrige la variance d'échantillon en la multipliant par  $\frac{5}{4}$ : on obtient la **variance corrigée**:

- $\ =$  la moyenne des variances corrigées d'échantillon  $\frac{5}{4} \times \sigma_{\acute{e}ch.}^2$  soit  $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \sigma^2 = \sigma^2$ .
- Pour l'échantillon de taille n, la variance corrigée est  $\frac{n}{n-1}$   $\sigma_{\acute{e}ch.}^2$  soit Erreur!

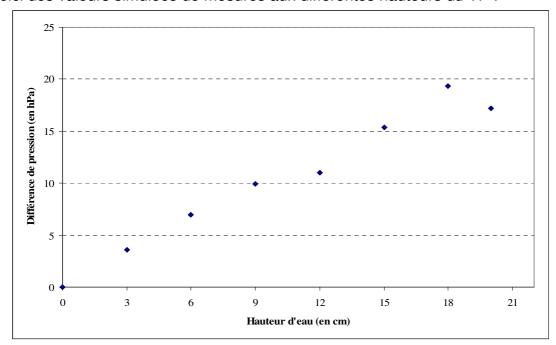
L'écart type corrigé est la racine carrée de la variance corrigée (pour retrouver une caractéristique dont la dimension est celle des données).

# Retour au TP1

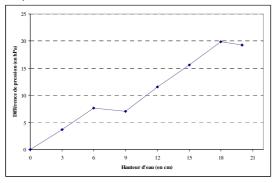
Que se passe-t-il lorsqu'on ne dispose que d'une seule mesure pour chaque hauteur ?

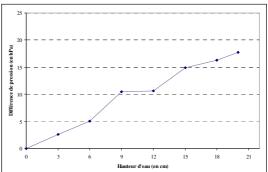
Pour chaque hauteur, on obtient une différence de pression qui est éloignée de la valeur cherchée d'un certain écart, appelé **erreur de mesure**.

Voici des valeurs simulées de mesures aux différentes hauteurs du TP :



On ne peut pas joindre les points obtenus car ils fluctuent. Voici deux autres exemples !

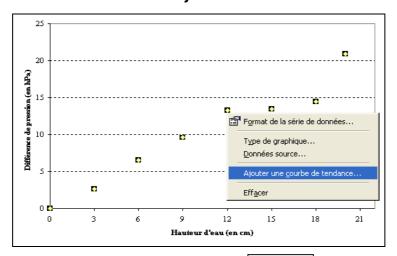




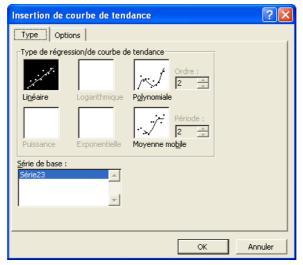
## Traitement d'une série de mesures

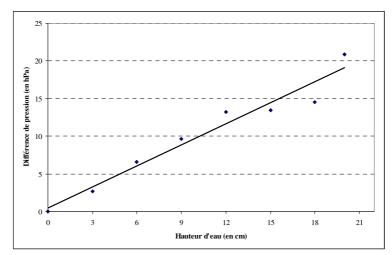
On construit le nuage de points associés à une série de résultats expérimentaux que l'on peut ajuster par une droite lorsque les points sont proches de l'alignement. On obtient ici la *droite de régression linéaire de la différence de pression en la hauteur*.

Avec un tableur (Excel ou Calc d'OpenOffice), la droite d'ajustement s'obtient par un clic droit sur un des points représentant les données. On obtient un menu contextuel et on choisit la commande *Ajouter une courbe de tendance...*:

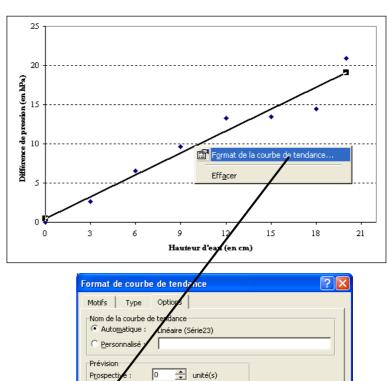


On choisit l'option *Linéaire* et après un clic sur OK, la droite apparaît sur le graphique.





La droite de régression peut servir à faire des estimations de résultats pour des valeurs de hauteurs qui n'ont pas été choisies lors de l'expérience. On utilise pour cela son équation réduite que l'on peut faire apparaître par un clic droit et le choix de la commande *Format de la courbe de tendance...* du menu contextuel qui apparaît.



0

l'axe <u>h</u>orizontal (X) à:

er l'éq<u>u</u>ation sur le graphique

unité(s)

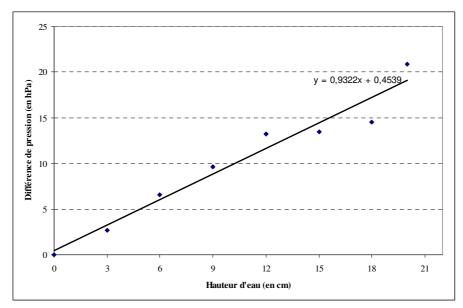
0

le coefficient de détermination (R2) sur le graphique

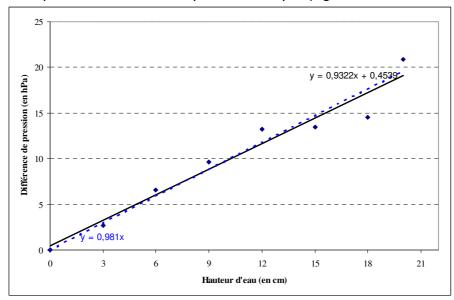
OK

Annuler

Dans l'onglet *Options* de la fenêtre qui s'ouvre, on coche l'option *Afficher l'équation sur le graphique*. Après un clic sur OK, l'équation réduite de la droite apparaît sur le graphique.



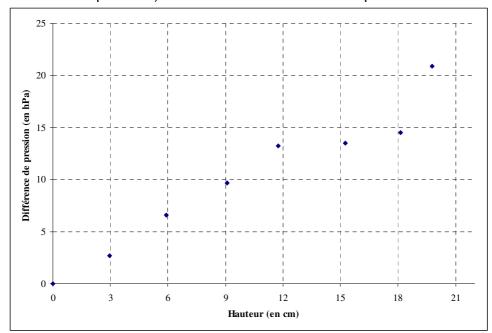
On peut comparer la droite de régression linéaire associé aux points du nuage avec la droite qui traduit la loi sur la pression :  $\Delta p = \rho g h$ .



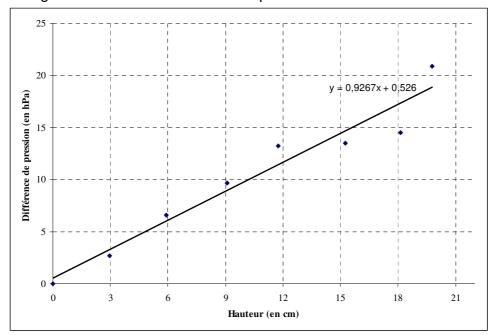
La méthode des moindres carrés n'imposent pas à la droite de régression de passer par l'origine. Compte tenu des incertitudes de mesure, on peut considérer que ces résultats expérimentaux obéissent à la loi sur la pression.

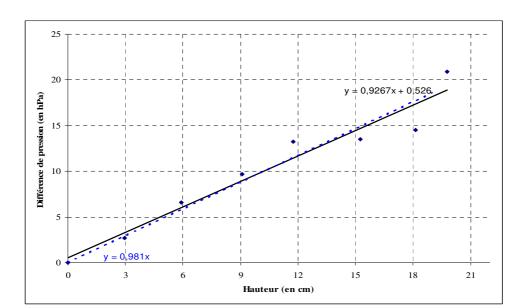
# Pour aller plus loin...

On aurait pu tenir compte de l'incertitude sur la mesure de la hauteur d'eau : incertitude sur les graduations de la règle, incertitude sur l'ajustement du niveau d'eau dans le tube du pressiomètre avec la graduation de la règle (incertitude de répétabilité du manipulateur). Voici des résultats obtenus par simulation :



Droite de régression linéaire associée aux points obtenus :





Comparaison avec la droite obtenue avec la loi sur la pression.

## **Conclusion**

À partir d'une expérience de mesure de la pression en un point d'un liquide pour différentes hauteurs, les élèves sont sensibilisés à l'incertitude attachée à toute mesure, à l'analyse et à la critique des résultats d'une expérience. Le lien établi avec les indicateurs statistiques - moyenne et écart type - permet de donner du sens à ces indicateurs et sensibilise les élèves à l'interprétation de ces paramètres.

Le recueil des mesures dans des conditions de "répétabilité" lors du TP2, permet aux élèves de prendre conscience de l'existence d'une erreur aléatoire que l'on produit en réalisant une expérience plusieurs fois dans les mêmes conditions expérimentales. La valeur "vraie" est impossible à déterminer. On détermine un intervalle de confiance à l'intérieur duquel on peut estimer que se trouve la valeur cherchée avec un certain niveau de confiance.

Les résultats de mesures obtenus à l'issue du TP1 conduisent les élèves à la recherche d'un modèle, ici le modèle linéaire, pour interpréter et exploiter leurs résultats.

Avec un autre groupe d'élèves, cette même expérience d'étude de l'évolution de la différence de pression en fonction de la hauteur du liquide a été réalisée par EXAO. Les mesures dans des liquides différents permettent aux élèves de comprendre le sens des résultats affichés par l'ordinateur lorsqu'on réalise une courbe de tendance « Régression linéaire » et de comprendre le sens du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine. Ces résultats feront l'objet d'un prochain article.

## Références

#### Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale spécial n°2 du 19 février 2009 :

http://cache.media.education.gouv.fr/file/special\_2/25/3/mathematiques\_sciences\_physiques\_chimiques\_44253.pdf

#### **Enseignement Agricole:**

#### Référentiel de Seconde Professionnelles

http://www.chlorofil.fr/diplomes-et-referentiels/formations-et-diplomes/2nde-professionnelle.html

### Référentiel de formation des modules généraux (Janvier 2010)

http://www.chlorofil.fr/index.php?eID=tx nawsecuredl&u=0&file=fileadmin/user upload/diplomes/ref/bacpro/bacpro-mg-tronc-communref.pdf&t=1415818094&hash=f8500e7e4610125cf5e533f2fc5334124475a0a0

Documents sur mesure et incertitudes (Inspection Générale de l'Éducation Nationale mai 2012) :

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/12/7/LyceeGT ressources MathPC Mesure et incertitudes 218127.pdf

# **Annexe 1 concernant TP1**

T5	2- Pourquoi les hublots des bateaux sont-ils épais ?	Durée 2 h
Activité 1		
1) Pourquo piscine ?	a-t-on mal aux oreilles lorsqu'on plonge trop profondé	ment dans une
2) Lors de principal	la construction d'un sous-marin, quelle peut être une es ?	des contraintes
	t-on penser de l'idée suivante, proposée par un élève lors de bouteille d'eau percée : "La pression est proportionnelle à la	•
Activité 2		
de faire des On met à dis	er l'augmentation de la pression en fonction de la profondeur mesures de pression dans l'eau.  Eposition:  Domètre électronique.	, on se propose
On met à dis	position:	
<ul><li>Une éprou</li><li>Un tuyau s</li><li>Une règle</li></ul>	souple relié à un tube en verre.	
Travail à fai pressions.	re: Proposez un protocole expérimental permettant de faire	des mesures de
1		

#### Activité 3 Réalisation du TP

_		
Prem	ILATA	partie
1 1011		partic

1) A l'aide du matériel mis à votre disposition, relevez la pression atmosphérique :

 $P_{\text{atm}} = \dots$ 

2) Que pensez-vous de la valeur de la pression à la surface du liquide ? On notera cette pression  $p_0$ .

.....

3) En respectant le protocole prévu, faites les mesures et calculs suivants en fonction de la profondeur *h*.

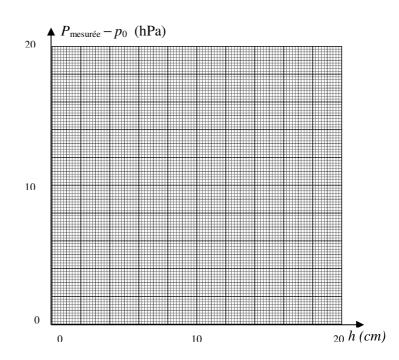
<b>h</b> (en cm)	0	3	6	9	12	15	18	20
P <sub>mesurée</sub> (en hPa)								
<b>P</b> <sub>mesurée</sub> − <b>p</b> <sub>0</sub> (en hPa)								

par la mesure

- 4) Sur la grille millimétrée suivante, représentez la différence de pression entre la surface et le point de mesure  $(P_{\text{mesurée}} p_0)$  en fonction de la profondeur h.
- 5) Que peut-on dire de l'affirmation de l'activité 1.3) ?

.....





#### Deuxième partie

Quelle relation y a-t-il entre la différence de pression et la différence de profondeur dans un fluide ?

1) Compléter le tableau suivant.

<b>h</b> (en cm)	0	3	6	9	12	15	18	20	
<b>P</b> <sub>mesurée</sub> − <b>p</b> <sub>0</sub> (en hPa)									} à reporter
<b>ρ.</b> <i>g.h</i> (en Pa)									par
<b>ρ.</b> <i>g.h</i> (en hPa)									le calcul

**Données :**  $\rho_{eau} = 1~000 \text{ kg/m}^3$  ; g = 9.81 N/kg

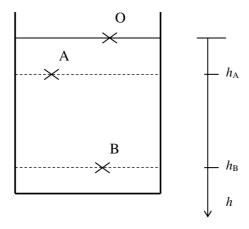
**Attention :** Pour le calcul de p. g.h, p s'exprime en kg/m<sup>3</sup>, g en N/kg et h en m.

2) En comparant les  $2^{\text{ème}}$  et  $4^{\text{ème}}$  lignes du tableau précédent, quelle est la relation que l'on peut déduire entre  $P_{\text{mesurée}} - p_0$  et  $\rho.g.h$ ?

#### Généralisation

Cette loi peut être généralisée si on prend comme référence un point A quelconque du liquide au lieu d'un point à la surface :

Écrire la relation générale : .....



#### Annexe 2 concernant TP2

# La rigueur de manipulation garantit-elle l'égalité des résultats expérimentaux ?

Durée 1 h 30

Évaluons l'incertitude attachée à un manipulateur pour le remplissage d'une éprouvette avec 25 mL d'eau distillée.

#### Matériel

- > éprouvette de 25 mL
- pipette Pasteur
- > thermomètre à 0,1 °C près
- ➤ balance à 10<sup>-2</sup> g près.

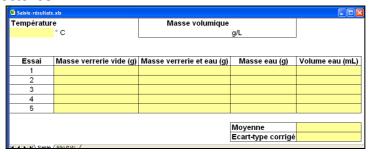


#### Protocole de l'expérience dans des conditions de répétabilité

- Étape 1 : Rincer l'éprouvette avec de l'eau, puis la rincer avec de l'acétone et la sécher.
- **Étape 2 :** Ajuster le zéro de la balance. Rapidement après, peser l'éprouvette vide (masse  $m_1$ ) et noter le résultat.
- Étape 3 : Remplir l'éprouvette avec 25 mL d'eau distillée en évitant les éclaboussures sur les parois de l'éprouvette (sécher les éclaboussures avec du papier absorbant sinon), utiliser la pipette Pasteur pour terminer le remplissage au goutte-à-goutte (attention à la parallaxe et au ménisque).
- **Étape 4 :** Ajuster le zéro de la même balance. Rapidement après, peser l'éprouvette remplie (masse  $m_2$ ) et noter le résultat.
- Étape 5 : Vérifier le "zéro" du thermomètre. Mesurer la température de l'eau de l'éprouvette.

Répéter 5 fois de suite les 4 premières étapes précédentes.

- Ouvrir le classeur Excel Saisie-résultats.xls.
- Remplir les cellules sur fond jaune (non protégées) de la feuille Saisie avec les résultats obtenus :



- Déterminer la masse de l'eau de chaque remplissage dans la colonne Masse eau (g).
- Utiliser la masse volumique qui se calcule en fonction de la température<sup>2</sup>, pour déterminer le volume d'eau contenue dans l'éprouvette lors de chaque manipulation et le saisir dans la colonne *Volume eau (mL)*. On considère que la température est constante tout au long de la manipulation. On néglige les variations de la masse volumique de l'eau dues à la présence d'isotopes des atomes constitutifs de l'eau.
- Calculer la moyenne des 5 volumes d'eau obtenus à la calculatrice ou avec le tableur Excel.
- Calculer l'écart type corrigé des 5 volumes à la calculatrice ou avec le tableur Excel. C'est l'**incertitude** associée au manipulateur pour le remplissage à 25 mL de l'éprouvette, on l'appelle **incertitude de répétabilité**, elle caractérise l'expérience dans les conditions où elle a été réalisée (même matériel, même manipulateur...).
- Vérifier les résultats dans la feuille Résultats.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> La masse volumique de l'eau dépend de la température t selon la relation suivante :  $\rho_{\text{eau}} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$  avec  $a_0 = +999,8395639$ ,  $a_1 = -0,067978299989$ ,  $a_2 = -0,009106025564$ ,  $a_3 = +0,0001005272999$ ,  $a_4 = -0,00001126713526$ ,  $a_5 = +0,0000000591795606$ 

# Une introduction de la fonction inverse en classe de SECONDE

Groupe Didactique des Mathématiques de l'IRES de Toulouse. Recherche élaborée dans le cadre du groupe CDAMPERES soutenu par l'I.N.R.P. C. Denux, J.P.Loubatières, R. Marquès, Y. Piau, M. Durançon

#### Résumé

Dans l'activité proposée, l'élève, guidé par l'enseignant, est invité à construire ses propres connaissances. Nous partons de l'idée que la notion d'infiniment grand est communément admise. La notion d'infiniment petit est beaucoup plus difficile à appréhender et est génératrice de difficultés dans l'apprentissage des limites de fonctions et de suites. Nous nous proposons d'aborder dans cette activité, la notion de fonction inverse et d'infiniment petit.

#### Mots Clés

Fonction – Limite – Infiniment petit – Collège – Lycée – TICE – Tableur – Logiciel de géométrie dynamique

#### **Présentation**

Dans le cadre de l'introduction de la notion de fonction inverse en classe de Seconde, nous avons fait le pari qu'une Question, non explicite dans les programmes de cette classe mais à Fort Pouvoir Générateur d'Etude et de Recherche (QFPGER), nous permettrait de motiver les élèves pour étudier l'évolution de deux quantités liées par une relation fonctionnelle.

Dans « De l'esprit géométrique », à partir de ce que nous pouvons appeler une QFPGER, Blaise Pascal a proposé un mécanisme pour faire comprendre l'infiniment petit à un interlocuteur qui admet l'infiniment grand.

Dans l'activité proposée, nous utilisons ce mécanisme au niveau Seconde pour introduire et étudier la fonction inverse.

A partir du texte de Blaise Pascal, on accompagne les élèves vers la découverte d'un lien entre deux grandeurs géométriques. Une relation de dépendance est alors mise en évidence à partir :

- D'un texte historique qui demande à être analysé et illustré.
- D'un logiciel de géométrie dynamique.
- De l'étude de valeurs prises par une quantité.
- De la recherche de l'expression de cette quantité en fonction de la variable.

La définition et les propriétés de la fonction inverse peuvent être alors mises en place.

#### Thèmes du programme de Seconde abordés dans cette activité

- Fonction.
- Ensemble de définition.
- Représentation graphique, résolution de l'équation f(x) = k dans le cas d'une fonction définie géométriquement.
- Fonction strictement décroissante.
- Fonction inverse.

#### **Déroulement**

Ce travail peut être réparti sur plusieurs séquences :

- Travail à la maison : lecture du texte historique et construction d'une figure pour l'illustrer.
- Mise en évidence de la représentation graphique de la fonction étudiée à l'aide d'un logiciel adapté, lecture graphique de propriétés de cette fonction,
- Découverte d'une expression de la fonction étudiée : la fonction inverse.
- Démonstration des conjectures.
- Synthèse.

#### Texte à lire à la maison et à illustrer à l'aide d'une figure

#### Un bateau s'éloigne du rivage

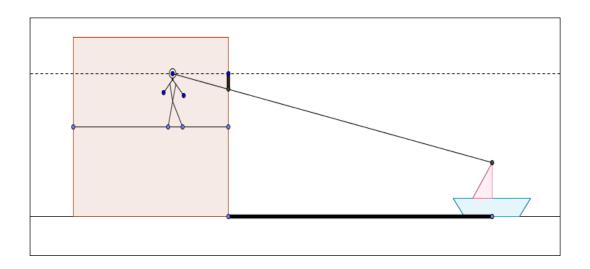
Il y a des segments de droite de toutes les longueurs. Il y en a donc de très petits. Et si un segment est extrêmement petit, au point peut-être qu'on ne le voit pas, peut-on toujours en trouver un plus petit ? C'est une question dont les philosophes ont débattu depuis l'Antiquité. Pascal était convaincu qu'on peut toujours en trouver un plus petit. Voici un argument qu'il a utilisé pour convaincre de cela une personne persuadée du contraire, mais admettant par ailleurs qu'il existe des segments aussi grands que l'on veut :

« Et dans l'espace le même rapport se voit entre ces deux infinis contraires ; c'est-à-dire que, de ce qu'un espace peut être infiniment prolongé, il s'ensuit qu'il peut être infiniment diminué, comme il paraît en cet exemple : si on regarde au travers d'un verre(une vitre d'une fenêtre) un vaisseau qui s' éloigne toujours directement, il est clair que le lieu du diaphane(la vitre) où l'on remarque un point tel qu'on voudra du navire haussera toujours par un flux continuel, à mesure que le vaisseau fuit(s' éloigne). Donc, si la course du vaisseau est toujours allongée et jusqu'à l'infini, ce point haussera continuellement ; et cependant il n'arrivera jamais à celui où tombera le rayon horizontal mené de l'œil au verre, de sorte qu'il en approchera toujours sans y arriver jamais, divisant sans cesse l'espace qui restera sous ce point horizontal, sans y arriver jamais. D'où l'on voit la conséquence nécessaire qui se tire de l'infinité de l'étendue du cours du vaisseau, à la division infinie et infiniment petite de ce petit espace restant au dessous de ce point horizontal. »

#### Compte-rendu en classe

Les travaux des élèves ont permis au professeur d'élaborer un fichier dynamique GEOGEBRA, ce fichier est alors montré à la classe.

On y voit le bateau qui s'éloigne, les grandeurs évoquées par Pascal sont mises en évidence. Le texte de Pascal est alors éclairé de manière significative.



#### Activité en salle informatique

En prolongement de l'activité précédente, on propose aux élèves d'élaborer un fichier de géométrie dynamique qui va nous permettre de traduire le discours de Blaise Pascal en quelques mots en utilisant le vocabulaire des fonctions.

Dans le repère orthogonal proposé par le logiciel GEOGEBRA, on considère les points I(1;0); J(0;1);A(1;1);M(x;0) avec x réel positif. Le point M est donc un point mobile sur la demi-droite [OI).

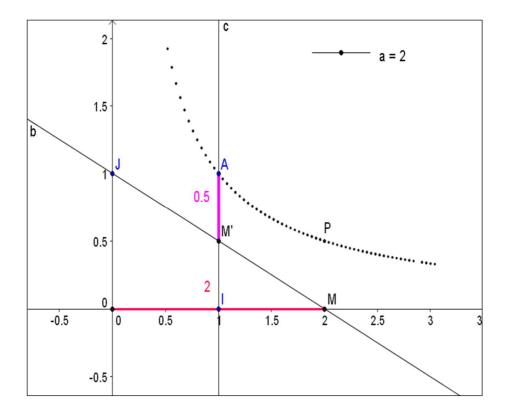
Quand il existe, on note M' le point d'intersection des droites (JM) et (AI). Faire une figure complète, mettre en évidence les segments [OM] et [AM']. Faire le lien avec le texte de Pascal.

Quelle est la fonction f qui à x associe AM'? Dessiner sa représentation graphique.

Quel est son ensemble de définition ? Son sens de variation ?

A l'aide des notations de la figure et du vocabulaire des fonctions, réécrire en quelques mots le discours de Blaise Pascal.

La figure obtenue est la suivante. La trace obtenue est celle du point P de coordonnées (OM ; AM').



Pour répondre à la question « Quelle est la fonction f qui à x associe AM' ? », on attend des élèves une conjecture dans un premier temps.

Si nécessaire, on peut proposer des jokers du type :

Quelle est la position de M pour AM' = 2 ou  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{4}$ ?

Dans un deuxième temps, la simplicité de la conjecture  $AM' = \frac{1}{x}$  rend plus motivante la démonstration de ce résultat.

Une démarche analytique peut être utilisée, cela dépend des pré-requis.

Si besoin, une configuration de Thalès de type « papillon » pourra être mise en évidence, ce qui facilitera la tâche des élèves dans le cas d'une démonstration non analytique.

Il y a plusieurs façons de représenter graphiquement f, la plus simple est d'écrire  $f(x) = \frac{1}{x}$  dans la fenêtre SAISIE du logiciel. Les élèves peuvent vérifier que la courbe obtenue contient la trace du point P.

L'ensemble de définition de la fonction définie dans l'exercice est l'ensemble

des réels strictement positifs.

Exemples de réécriture du texte de Blaise Pascal :

- Lorsque le point M (d'abscisse x) représentant le vaisseau s'éloigne du port, la distance AM' (égale à  $\frac{1}{x}$ ) devient de plus en plus petite.
- Lorsque le nombre x devient de plus en plus grand, son image par la fonction inverse devient de plus en plus proche de zéro.

#### Synthèse en classe

- Terminer les démonstrations des conjectures :
  - AM' =  $\frac{1}{y}$
  - La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle des réels strictement positifs.
- Effectuer un bilan qui indique notamment que le sens de variation et la représentation graphique de la fonction inverse font partie des connaissances exigibles du programme.

#### **Conclusion**

La notion d'infiniment petit a été un moteur pour l'étude de relation entre deux grandeurs et pour introduire en Seconde la notion de fonction dans un cas non affine. L'étude de la fonction inverse est alors apparue plus naturelle.

#### Pour aller plus loin

Vous pouvez découvrir des activités autour de la notion de l'infiniment petit dans la brochure éditée par l'I.R.E.M de Toulouse : *Limites et infiniment petit*.

Retrouvez le groupe Didactique des Mathématiques de l'IRES de Toulouse sur le site de l'IRES de Toulouse : *irem.ups-tlse.fr* 

et d'autres ressources en ligne sur le site

http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes

# **MEDIANE ET QUANTILES**

Hussein HAMMOUD, IRES de Toulouse hussein.hammoud@ac-toulouse.fr

#### Résumé

Il n'existe pas de manière consensuelle de parler des quantiles. Voici un passage en revue succinct de la littérature, qui s'achève par une proposition supplémentaire de formalisation. Une référence incontournable dans le domaine des statistiques descriptives est évoquée : il s'agit de J.W.Tukey et de son diagramme en boite.

#### **Mots-clés**

Médiane, quartile, décile, quantile, valeur aberrante, élagage, diagramme en boîte, Tukey, statistiques descriptives, analyse exploratoire.

#### Introduction par un exemple

Environ 10000 candidats se sont présentés au Concours de Recrutement de Professeurs des Ecoles (CRPE), leurs copies de mathématiques ont été corrigées par plus de 130 correcteurs. On voudrait comparer ces différents correcteurs. Par exemple, pour chacun d'eux, on cherche la note dépassée (on non) par 10% des candidats. Il s'agit dans ce cas du 9ème décile. Ou bien, on cherche pour chaque correcteur, la note  $\alpha$  telle que la moitié des candidats ont une note inférieure ou égale à  $\alpha$  (il s'agit de la médiane). Le problème de la recherche des quantiles, aboutit à la construction d'intervalles contenant un certain pourcentage des observations. On va par exemple chercher l'intervalle contenant 60% des notes les plus basses, ou bien l'intervalle contenant 80% des notes centrales, etc.

#### Point de vue fréquentiel

#### Définition

Les quantiles sont des valeurs du caractères qui partagent la distribution en k parties comprenant le même effectif égal à un k<sup>ième</sup> de l'effectif total.

Valeur de k	Quantile obtenu
4	quartile
10	décile
100	centile

#### Cas des quartiles

Ce sont les trois valeurs du caractère qui séparent la distribution en 4 parties comprenant le même effectif égal au quart de l'effectif total. Les quartiles sont désignés respectivement par :

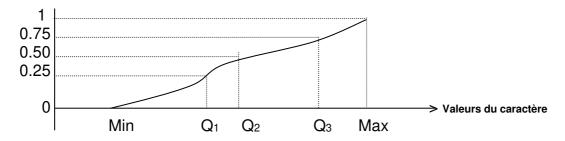
- Q<sub>1</sub> le premier quartile (ou quartile inférieur) : 25% des données sont inférieures ou égales à Q<sub>1</sub>.
- $Q_2$  le quartile central : 50% des données sont inférieures ou égales à  $Q_2$ . En fait,  $Q_2$  est la médiane.
- Q<sub>3</sub> le troisième quartile (ou quartile supérieur) : 75% des données sont inférieures ou égales à Q<sub>3</sub>.

On peut interpréter  $Q_1$  et  $Q_3$  comme les médianes respectives de la série allant de la valeur minimale de la série mère ordonnée jusqu'à  $Q_2$ , et celle allant de  $Q_2$  à la valeur maximale.

#### Diagramme des fréquences cumulées ou diagramme intégral

Les déciles sont les abscisses des points dont les ordonnées sont respectivement  $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, ..., \frac{9}{10}$ .

Les quartiles sont les abscisses des points dont les ordonnées sont respectivement 0.25, 0.50 et 0.75

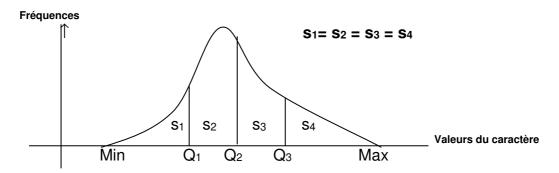


#### Diagramme de la distribution ou diagramme différentiel

Les quartiles sont les abscisses des droites (verticales) qui partagent la surface sous la courbe des fréquences, en quatre aires égales.

Les déciles sont les abscisses des droites qui partagent la surface sous la courbe des fréquences, en dix aires égales.

Les centiles sont les abscisses des droites qui partagent la surface sous la courbe des fréquences, en cent aires égales.



#### Point de vue analytique

#### Définition

extrait du texte d'accompagnement (2001) de la classe de première.

Soit une série numérique de données à valeurs dans un intervalle.

On définit la fonction Quantile par :

$$Q:[0;1] \to I$$

$$u \to \inf \{x \in I, F(x) \ge u\}$$

où F(x) est la fréquence des valeurs observées inférieures ou égales à x.

<u>La fonction F</u> est une fonction en escalier dans le cas d'une série discrète finie : F est constante sur les intervalles  $[x_i; x_{i+1}[$  où  $x_i$  sont les valeurs ordonnées de la série.

Si n est la taille de la série, Q(u) est le terme dont le rang est le plus petit entier supérieur ou égal à  $n \times u$ .

#### Quantiles particuliers

- quartiles :  $Q_i = Q(\frac{1}{4}i)$  pour i = 1, 2, 3 (remarque :  $Q(\frac{1}{2})$  est la médiane)
- déciles :  $D_i = Q(\frac{1}{10}i)$  pour i = 1 à 9
- centiles :  $C_i = Q(\frac{1}{100}i)$  pour i = 1 à 99

#### Sens de variation de la fonction Q

La fonction Q est une fonction croissante de u. Pour une série ordonnée, pour tous  $u_1, u_2 \in [0 \ ; \ 1]$  tels que  $u_1 < u_2$  alors  $Q(u_1) \le Q(u_2)$ 

#### Démonstration

Pour  $u_1 < u_2$  alors  $\{x \in I, \ F(x) \ge u_1 \} \supseteq \{x \in I, \ F(x) \ge u_2 \}$ , donc :

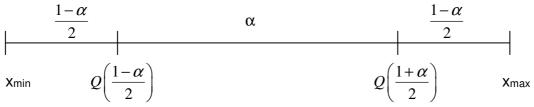
inf  $\{x \in I, F(x) \ge u_2\} \in \{x \in I, F(x) \ge u_1\}$ 

qui s'écrit plutôt :  $Q(u_2) \in \{x \in I, F(x) \ge u_1\}$ 

c'est-à-dire que :  $Q(u_2) \ge \inf \{x \in I, F(x) \ge u_1 \}$ 

ou encore :  $Q(u_2) \ge Q(u_1)$ .

# Détermination de l'intervalle contenant une proportion $\alpha$ des valeurs centrales



L'intervalle contenant une proportion  $\alpha$  des valeurs "centrales" est :

$$\left[Q\left(\frac{1-\alpha}{2}\right);Q\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]$$

Par exemple, l'intervalle interquartile contenant 50% ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ) des observations centrales est donné par l'intervalle [Q<sub>1</sub> ; Q<sub>3</sub>] où :

$$Q_1 = Q(\frac{1-\alpha}{2}) = Q(\frac{1-\frac{1}{2}}{2}) = Q(\frac{1}{4}) \qquad \text{et} \qquad Q_3 = Q(\frac{1+\alpha}{2}) = Q(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}) = Q(\frac{3}{4}).$$

# <u>Une proposition de formalisation pour la médiane et les quartiles : la notion de profondeur</u>

Voici maintenant une manière supplémentaire de déterminer des quartiles. On considère une variable quantitative et un ensemble P d'observations constituant le paquet de données à explorer. Les données sont classées dans l'ordre croissant et on définit alors, pour tout  $x \in P$ ,  $r_c(x)$  le rang de x selon cet ordre croissant. Puis les données sont classées dans l'ordre décroissant et on définit pour tout  $x \in P$ ,  $r_d(x)$  le rang de x selon cet ordre décroissant.

Enfin, on définit la profondeur de  $x \in P$  par la plus petite distance entre x et l'une des deux extrémités du paquet :  $prof(x) = inf(r_c(x), r_d(x))$ 

Pour tout  $x \in P$ , on a évidemment :  $r_c(x) + r_d(x) = 1 + Nombre de données$ 

La médiane étant située au milieu,  $prof(Me) = \frac{1 + Nombre de données}{2}$ 

Chacun des quartiles étant situé à égale distance de la médiane et l'une des extrémités, ils ont la même profondeur, soit :  $\frac{1+E(prof(Me))}{2}$ 

E(x) désignant comme d'habitude, la fonction partie entière.

#### Exemple

On considère les paquets :  $P_1 = \{7, 60, 61, 62, 63, 65, 69, 73, 76\}$  et  $P_2 = \{60, 61, 62, 63, 65, 69, 73, 76\}$ .

<b>x</b> ∈ <b>P</b> <sub>1</sub>	7	60	61	62	63	65	69	73	76
Rang croissant	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rang décroissant	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Profondeur	1	2	3	4	5	4	3	2	1

x∈P <sub>2</sub>	60	61	62	63	65	69	73	76
Rang croissant	1	2	3	4	5	6	7	8
Rang décroissant	8	7	6	5	4	3	2	1
Profondeur	1	2	3	4	4	3	2	1

#### On obtient les résultats suivants :

	prof(Me)	Me	prof(Q <sub>1</sub> )	Q <sub>1</sub>	prof(Q <sub>2</sub> )	Q <sub>2</sub>
P <sub>1</sub>	5	63	3	61	3	69
$P_2$	4.5	64	2.5	61.5	2.5	71

#### Le diagramme en boîte de TUKEY

#### Définition

Extrait du document d'accompagnement des programmes de Premières - 2001

"On divise l'intervalle des valeurs prises par une série statistique en intervalles contenant certains pourcentages des données".

Il y a 4 subdivisions contenant chacune 25 % des données rangées dans l'ordre croissant.

#### Description

"Box and whiskers plot "nous vient de Tukey (1915-2000) dans son ouvrage historique publié en 1977, Exploratory Data Analysis.

Le diagramme en boîte ou boîte à pattes est constitué d'une boîte rectangulaire avec un trait vertical à l'intérieur. Les deux bords de la boîte correspondent aux deux quartiles. Leur différence est l'écart interquartile. A l'extérieur, un trait de chaque côté, prolonge la boîte jusqu'à la valeur minimum et la valeur maximum. Ce sont les "moustaches".

Le diagramme en boîte permet de détecter les valeurs aberrantes.

#### Valeur aberrante : qui se démarque des autres (Tukey).

Sur le diagramme, la valeur aberrante se trouve à plus d'un saut de l'un ou de l'autre des deux bords de la boîte.

## Un saut est égal à une fois et demie la longueur de l'écart interquartile (Tukey)

Le diagramme en boîte permet, visuellement, de :

- évaluer la médiane
- évaluer les quartiles
- évaluer l'étendue interquartile
- détecter les valeurs aberrantes
- évaluer le degré de symétrie entre les deux quartiles (il y a symétrie lorsque la médiane se trouve au milieu des deux quartiles)

En bref, l'utilité du diagramme en boîte peut se résumer à :

- décrire un paquet de données
- comparer plusieurs paquets de données en ce qui concerne la médiane, les quartiles, l'écart interquartile, les valeurs aberrantes.

#### Exemple d'utilisation

Les trois paquets de données ci-dessous donnent les performances de trois groupes indépendants de sportifs de haut niveau, respectivement après un an (P<sub>1</sub>), deux ans (P<sub>2</sub>) et trois ans (P<sub>3</sub>) d'entraînement :

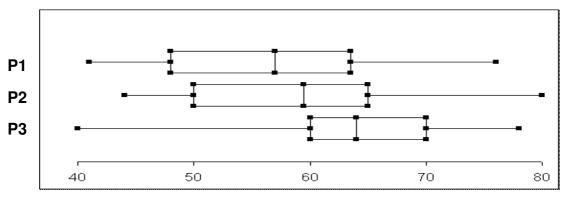
 $P_1 = \{41, 45, 46, 47, 47, 48, 48, 49, 50, 51, 56, 57, 57, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 74, 76\}$ 

 $P_2 = \{44, 46, 50, 53, 55, 64, 65, 65, 73, 80\}$ 

 $P_3 = \{40, 50, 51, 55, 60, 61, 61, 61, 64, 66, 67, 68, 70, 71, 71, 74, 78\}$ 

	Min	Q <sub>1</sub>	Me	Q <sub>3</sub>	Max
P <sub>1</sub>	41	48	57	63.5	76
P <sub>2</sub>	44	50	59.5	65	80
P <sub>3</sub>	40	60	64	70	78

Comparaison des trois groupes par juxtaposition de leurs diagrammes en boîte :



Il devient clair que le nombre d'années d'entrainement induit globalement une performance supérieure.

#### Pertinence d'un diagramme en boîte

Cependant, en pratique, il ne faut jamais s'en tenir uniquement au diagramme en boîte pour étudier une distribution. On a souvent recours à un autre outil d'analyse exploratoire, par exemple, le diagramme tige-feuilles. Voici deux situations où la représentation par un diagramme en boite montre ses limites.

Le premier exemple concerne deux distributions différentes, peuvent avoir des boîtes identiques.

Considérons les deux paquets suivants :

 $P_1 = \{1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,7,7,7,8,8,8,9,9,9,10,10\}$  $P_2 = \{1,1,2,2,2,2,3,3,3,4,4,5,6,7,7,7,8,8,8,9,9,9,9,10,10,10,10,10,10\}$ 

	Min	Q <sub>1</sub>	Me	$Q_3$	Max
P <sub>1</sub>	1	3	6	8	10
P <sub>2</sub>	1	3	6	8	10

Le second exemple montre qu'il peut arriver que le diagramme en boîte ne reflète pas du tout la situation étudiée, et la médiane devenant franchement un mauvais indicateur. La distribution du parc automobile d'une entreprise selon la puissance fiscale des véhicules est présentée ci-dessous :

Puissance en CV	4	5	6	7	8	9
Nombre de véhicules	52	63	254	70	25	13
Effectifs cumulés	52	115	369	439	464	477

Le résumé de cette distribution est le suivant :

Min	Q <sub>1</sub>	Me	$Q_3$	Max
4	6	6	6	9

Nous laissons au lecteur le soin d'en juger.

Dans ce genre de situations, on doit recourir à d'autres types de résumés, par exemple un diagramme en barres ou circulaire, on peut aussi bien calculer la moyenne des puissances fiscales, l'écart-type, etc.

#### Le problème de l'élagage

Le problème en réalité est de savoir où faut-il arrêter les extrémités de la boîte. Bien-entendu, si les valeurs minimale et maximale ne s'éloignent pas trop de la "fenêtre" de représentation, la question est sans intérêt sauf si l'on désire encore découper l'intervalle pour le "quantiler" davantage. Mais lorsque les valeurs sont aberrantes, il serait peut-être salutaire de les élaguer, c'est-à-dire les éliminer tout simplement.

#### Il y a plusieurs méthodes d'élagage

• L'élagage selon Tukey : une valeur située à plus d'un saut d'un quartile à l'une ou à l'autre extrémité, est une valeur aberrante, donc à élaguer. On rappelle qu'un saut est égal à 1,5 fois l'écart interquartile. Une valeur aberrante est donc inférieure à  $Q_1 - saut$  ou bien supérieure à  $Q_3 + saut$ 

#### Exemple

Soit le paquet de données suivant : {30, 59, 60, 64, 64, 68, 68, 69, 75, 75, 77, 81, 83}

 $Q_1 = (60+64)/2$  et  $Q_3 = (75+77)/2$ 

Min	Q <sub>1</sub>	Me	Q <sub>3</sub>	Max
30	62	68	76	83

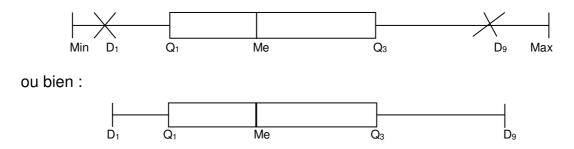
L'écart interquartile est :  $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 76 - 62 = 14$ 

Le saut est :  $1,5 \times 14 = 21$ 

Les données se trouvant en-decà de 62–21 = 41 ou au-delà de 76+21 = 97 sont suspectes. On les identifie lorsque cela est possible, sur le diagramme en boite par un symbole spécifique. Ici, seule la valeur 30 sera décrétée aberrante.

Les traits à l'extérieur de la boîte vont jusqu'à la dernière valeur qui ne soit pas aberrante.

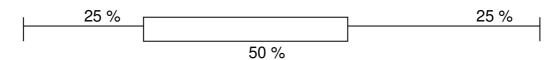
• L'élagage à partir des déciles : les valeurs situées avant le premier décile ou après le neuvième décile sont à élaguer. En général, dans ce cas, on représente le minimum, le maximum et les deux déciles. La position des déciles est marquée par une petite croix.



• L'élagage à  $2\alpha$  %, qui consiste à élaguer  $\alpha$ % de chaque côté, soit  $\alpha$  % des valeurs se trouvant immédiatement après le minimum, et  $\alpha$  % des valeurs se trouvant immédiatement avant le maximum.

#### Que devons-nous enseigner aux élèves

Le diagramme en boîte revient à procéder à un partage des données en 4 parties contenant chacune 25% des données, et pour chacune de ces parties, on peut donner la valeur minimale et la valeur maximale. En particulier, on pourra donner les valeurs prises par les 50 % du centre.



Extrait du document d'accompagnement des programmes de Premières - 2001

- les techniques de détermination de la médiane sont souples, adaptables, et par extension, celles de détermination des quantiles.
- examiner toujours la légitimité d'un élagage, son utilité, son sens

#### Conclusion

Le diagramme en boîte fait partie des outils de l'analyse exploratoire, il fournit visuellement les principales caractéristiques d'une distribution, en particulier, il met en évidence la dispersion et les valeurs aberrantes. Comme sommaires numériques, on choisit la médiane et l'écart interquartile, plus fiables et plus résistants en général que les habituels moyenne et écart-type. Nous terminons en conseillons au lecteur intéressé par le sujet, la consultation de l'excellent ouvrage deTukey publié en 1977, Exploratory Data Analysis, aux éditions Addison-Wesley, ouvrage que l'on trouve dans les bibliothèques universitaires.

## D' Engel à Euler

François BERTRAND Lycée BELLEVUE - Toulouse francois.bertrand@dbmail.com

#### Résumé

Dans cet article, on présente la résolution d'un problème diophantien, posé par Euler et popularisé par Engel.

#### Mots clés

Engel, Equation diophantienne, Corps quadratique

#### Introduction

Rien n'est, nous semble-t-il, plus mathématiquement stimulant qu'une question dans laquelle se mêlent mystérieusement concision et pouvoir évocateur. On trouvera dans [1] quelques énoncés qui s'approchent de ce subtil dosage. Il en va ainsi du problème suivant, tiré du chapitre 6 de cet ouvrage et que nous noterons  $(E_n)$ :

 $(E_n)$ : pour  $n \ge 3$ ,  $x^2 + 7y^2 = 2^n$  admet une solution  $(x; y) \in \mathbb{N}^2$  avec x et y impairs.

A sa seule lecture, ce fut le coup de foudre. Tout y était : cadre arithmétique élémentaire, analogie multiplicative prometteuse entre les deux membres de  $(E_n)$  et ombre de Ramanujan, portée par l'équation diophantienne (dite de Ramanujan-Nagell) :

$$x^2 + 7 = 2^n [2]$$

Confessons aussi que la réponse donnée par Engel [1] n'a pas été consultée ni même regardée, il appartiendra au lecteur de la comparer, s'il le souhaite et si cela le mérite, à la solution donnée ici.

Pour finir signalons qu' Engel fut un pédagogue hors-pair, comme le montre son traité consacré aux probabilités [3] . Il coacha aussi l'équipe allemande en compétition pour les Olympiades Internationales de Mathématiques.

Engel attribue à ce problème une double origine. L'une est académique : cet énoncé figurait dans une épreuve d'Olympiade Mathématique moscovite. L'autre est historique : il semble que ce soit en fait une question posée par Euler, autre facteur motivant, on en conviendra.

### Attaque frontale

Consacrons-nous à la résolution en nombres entiers impairs de l'équation  $(E_{n+3})$  dans la mesure où n est un entier naturel.

Définissons pour cela une suite  $(x_n; y_n)$  de  $\mathbb{Q}^2$  par  $(x_0; y_0) = (1; 1)$  et pour tout

entier naturel n : 
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n - 7y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$$
 (\*)

On s'expliquera plus loin sur ce deus ex machina.

#### **Proposition 1**

Pour tout entier  $n \ge 0$ ,  $(x_n; y_n)$  est solution du problème d'Engel d'ordre n.

#### Preuve

Montrons, par récurrence, la propriété  $(P_n)$ :

$$\begin{cases} i) \ x_n \ et \ y_n \ impairs \\ ii) \ x_n - y_n \equiv 0 \pmod{4} \\ iii) \ (x_n; y_n) \ solution \ de \ (E_{n+3}) \end{cases}$$

 $(P_0)$  étant clairement vérifiée, on suppose donc que  $(P_n)$  est établie à un rang n donné. Remarquons alors que  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  sont bien des entiers et que  $x_{n+1}-y_{n+1}=-4y_n$ , ce qui assure le point ii) et le fait que  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  soient de même parité. Notons aussi que  $x_{n+1}+y_{n+1}=x_n-3y_n\equiv 2y_n\pmod 4$ , ce qui interdit à  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  d'être pairs tous les deux puisque, avec ii),  $x_{n+1}+y_{n+1}$  serait un multiple de 4 alors que  $y_n$  est impair.

Ainsi i) est validé.

Enfin, 
$$x_{n+1}^2 + 7y_{n+1}^2 = \frac{8}{4}(x_n^2 + 7y_n^2) = 2^{n+4}$$
 d'où  $(P_{n+1})$ , et la récurrence se poursuit.

Si on veut, comme l'énoncé initial l'exigeait une solution à ce même problème mais en entiers naturels, il suffit de considérer  $(|x_n|; |y_n|)$ .

#### Contexte

Le lecteur averti aura reconnu en le membre de gauche de  $(E_n)$  l'expression de la norme N du corps quadratique  $\mathbb{Q}(i\sqrt{7})$  définie par :  $N(z) = |z|^2$  pour z dans ce corps.

L'anneau des entiers de  $\mathbb{Q}(i\sqrt{7})$  étant  $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]^{def} = \theta$ , on peut donc poser

 $\theta^{n+1} = \frac{x_n + i y_n \sqrt{7}}{2}$  (\*\*) où  $x_n$  et  $y_n$  sont des entiers de même parité, ce pour tout

 $n \in \mathbb{N}$ . Dès lors l'égalité  $\theta^{n+2} = \theta \times \theta^{n+1}$  donne la relation (\*) et on retrouve les suites du paragraphe précédent. Par ailleurs l'action de N sur chaque membre de (\*\*) montre, sans calcul, que  $(x_n; y_n)$  s'en trouve solution de  $(E_{n+3})$ . Voilà pour quelques justifications a posteriori concernant la solution proposée plus haut ; le cadre algébrique utilisé pour cela permet toutefois d'en dire plus.

#### Problème d'unicité

#### **Proposition 2**

Soit n un entier naturel. (x; y) est solution au problème d' Engel d'ordre n si et seulement si :  $\exists (\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1,1\}, x = \varepsilon x_n \text{ et } y = \varepsilon' y_n$ 

**Preuve** : Nous nous appuierons sur les résultats élémentaires suivants.

#### Lemme

L'anneau  $\mathbb{Z}(\theta)$  est euclidien (pour la norme).

#### Preuve

Montrons donc que pour tout z de  $\mathbb{Q}(i\sqrt{7})$  il existe  $\alpha \in \mathbb{Z}(\theta)$  tel que  $N(z-\alpha) < 1$ .

En posant  $z = x + iy\sqrt{7}$  avec x et y rationnels, on définit q comme l'entier le plus proche de 2y, et p celui de [2x] ou [2x]+1 qui possède la même parité que q puis  $\alpha = \frac{p}{2} + i\frac{q}{2}\sqrt{7}$ .

Alors il vient : 
$$N(z-\alpha) = \frac{1}{4}((2x-p)^2 + (2y-q)^2) \le \frac{1}{4}(1+\frac{7}{4}) < 1$$

#### **Définition**

On note  $\Delta$  l'ensemble des éléments  $a+ib\sqrt{7}$  de  $\mathbb{Z}(\theta)$ , irréductibles, tels que  $a \in \mathbb{N}^*$  ou a = 0 et  $b \in \mathbb{N}^*$ .

Par exemple  $\theta \in \Delta$ , et si  $\pi$  est un irréductible de  $\mathbb{Z}(\theta)$ , on dispose de l'alternative  $\pi \in \Delta$  ou  $-\pi \in \Delta$ .

#### Corollaire

On peut donc développer une arithmétique similaire à celle de  $\mathbb{Z}$  dans l'anneau  $\mathbb{Z}(\theta)$  et affirmer que pour tout  $\alpha$  non nul de  $\mathbb{Z}(\theta)$  il existe une unique décomposition du type :

$$\alpha = \varepsilon \prod_{i=1}^{s} \pi_{i}^{m_{i}} \text{ où } s \in \mathbb{N}, (m_{1},...,m_{s}) \in (\mathbb{N}^{*})^{s}, \varepsilon \in \{-1,1\}, (\pi_{1},...,\pi_{s}) \in \Delta^{*}.$$

Donnons nous désormais x et y entiers impairs tels que :

$$x^2 + 7y^2 = 2^{n+3}$$
 ou encore  $N(\alpha) = 2^{n+1}$  avec  $\alpha = \frac{x}{2} + i\frac{y}{2}\sqrt{7} \in \mathbb{Z}(\theta)$ .

Comme la décomposition en produit de facteurs d'irréductibles de  $2^{n+1} = \theta^{n+1}\overline{\theta}^{n+1}$ , on en déduit que  $\alpha = \varepsilon\theta^i\overline{\theta}^j$  avec  $\varepsilon \in \{-1,1\}, 0 \le i \le j$ , quitte à changer  $\alpha$  en son conjugué, et i+j=n+1. Si  $i \ge 1$ , alors 2 divise  $\alpha$  ce qui est incompatible avec l'imparité de x (ou de y) ainsi i = 0 donc  $\alpha = \varepsilon\overline{\theta}^{n+1}$  ou  $\alpha = \varepsilon\theta^{n+1}$  d'où la proposition 2 (dans sa partie substantielle) grâce à  $\binom{**}{i}$ .

#### Références

[1] Arthur Engel, "Problem solving strategies (Springer)
Une traduction est disponible sous le titre "Solutions d'expert"

[2] Ramanujan, "Collected papers "page 327 (Chelsea)

[3] Arthur Engel, Les certitudes du hasard (Aléas)

## Compte-rendu de lecture

Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire Entre recherche, enseignement et culture

Maryvonne Spiesser, IREM de Toulouse



Coordonné par Evelyne Barbin et Marc Moyon Presses universitaires de Limoges Coll. Savoirs scientifiques et Pratiques d'enseignement, 2013

e livre fait suite à un colloque organisé par la commission inter-**I**IREM (Institut de l'enseignement recherche sur mathématiques) sur le thème « Epistémologie et histoire des mathématiques », qui s'est tenu à Limoges en juin 2012. Comme le sous-titre l'indique, les ouvrages et les sujets qui y sont étudiés ont trait à la recherche, l'enseignement ou la culture scientifique ; trois domaines dont les frontières sont loin d'être étanches. C'est à l'histoire de la littérature mathématique que s'attaque donc ce livre : une histoire synchronique ou diachronique selon les sujets. À travers manuscrits et imprimés, ouvrages ou corpus, nous parcourons des mathématiques qui s'étendent de l'antiquité grecque avec Euclide, au XX<sup>e</sup> siècle avec les mathématiques dites « modernes ».

inq parties composent le livre, vingt-deux auteurs y ont contribué, membres d'un IREM pour la grande majorité, dont les statuts et spécialités reflètent bien la diversité des intérêts affichée dans le sous-titre.

a première partie, intitulée « Des ouvrages héritiers d'Euclide », explore le devenir des *Éléments*. Dans le premier article, Odile Kouteynikoff, François Loget et Marc Moyon parcourent l'évolution du texte euclidien en s'arrêtant sur les éditions de la Renaissance. Le deuxième chapitre, par O. Kouteynikoff, est consacré à la réception des *Éléments* par Guillaume Gosselin, qui met ce texte au service d'un projet personnel, la construction d'une autonomie du champ numérique – incluant l'arithmétique élémentaire et l'algèbre – par rapport à la géométrie. Pour ces deux chapitres, une bonne habitude du contenu et du langage euclidien est un atout important pour mieux saisir ces relectures ou réécritures guidées par les projets et les conceptions des auteurs-éditeurs.

e propos du troisième article est différent. C'est aussi une histoire de réception, mais il s'agit ici d'examiner le destin de manuels français d'enseignement dans l'Amérique des années 1820-1860, période où furent publiés de nombreux *textbooks*. Pour ce faire, Thomas Prévenaud explore la piste de deux traductions-adaptations des *Éléments de géométrie* d'Adrien-Marie Legendre.

nfin, le dernier chapitre suit le devenir des *Éléments* d'Euclide, en vue de l'enseignement de la géométrie au XIX<sup>e</sup> siècle, dans trois pays : France, Italie, Angleterre. De manière très instructive, les auteurs (Evelyne Barbin, Marta Menghini, Amirouche Moktefi) montrent comment la diversité des contextes nationaux explique la diversité des postures vis à vis du maintien ou de l'abandon du texte euclidien, les débats s'inscrivant en même temps dans un contexte d'échanges transnationaux.

a deuxième partie (« Des ouvrages pour initier à de nouvelles mathématiques ») aborde, comme le titre l'indique, le genre « ouvrage d'initiation ». Comment permettre à un public non averti de saisir l'essentiel de travaux novateurs? Les trois premières contributions s'intéressent à la diffusion des écrits de Leibniz et Newton. Sandra Bella prend l'exemple bien connu de la clarification des idées de Leibniz sur le calcul différentiel par le Marquis de l'Hospital via L'analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes (1696), ouvrage qui suscitera à son tour des commentaires, eux-mêmes d'un abord difficile pour l'étudiant débutant. Thierry Joffredo montre très clairement les ambitions de ce type d'ouvrage en analysant L'Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, écrit par Gabriel Cramer en 1740. Le mathématicien s'appuie sur l'Enumeratio linearum tertiis ordinis de Newton, et aussi sur trois textes ultérieurs qui sont autant de jalons dans la conception de son *Introduction*, un texte qui se veut pédagogique, un ouvrage d'enseignement et de culture mathématique. André Stoll donne quelques clefs pour faciliter la lecture des Principes mathématiques de la philosophie naturelle de Newton; et ne réserve qu'une très brève conclusion à la réception de l'ouvrage en France, à travers la publicité qu'en fit Voltaire dans son essai, les Éléments de philosophie de Newton.

a dernière contribution délaisse le XVIIIe siècle pour aborder les mathématiques dites modernes. E. Barbin explore l'*Exposé moderne des mathématiques élémentaires* de Lucienne Félix à travers les deux éditions de 1959 et 1961. Forte de son expérience personnelle lors de sa rencontre avec les mathématiques bourbakistes, L. Félix met en avant deux de leurs traits fondamentaux : l'unité des mathématiques et la méthode axiomatique. Ouvrages à destination des enseignants et des élèves, l'*Exposé* est une initiation qui vise davantage, selon les mots de E. Barbin, « celle des mathématiques modernes que celle d'une pratique moderne des mathématiques ».

a troisième partie regroupe des études d'ouvrages destinés à promouvoir les mathématiques, écrits dans des contextes différents. Il peut s'agir d'interroger la pertinence de notions nouvelles, notamment de leur introduction dans l'apprentissage. Dans cet esprit, la contribution de Jean-Pierre Lubet, intitulée « Faut-il étudier le calcul aux différences finies avant d'aborder le calcul différentiel et intégral ? » fait le point sur la question dans la deuxième moitié du XVIIIe siècle, en examinant des traités d'Euler, puis de Cousin, Bossut, Prony, Lagrange, ... Celle de François Plantade concerne les échanges épistolaires entre Gösta Mittag-Leffler et Jules Houël (à partir de 1877), en vue de présenter les fonctions elliptiques dans un enseignement de licence ès sciences mathématiques ; échanges que Houël a mis à profit dans l'écriture du chapitre correspondant de son *Cours de calcul infinitésimal*.

André-Jean Glière consacre son article à la *Théorie des systèmes* de nombres complexes d'Hermann Hankel (1867), qui révolutionna la notion de quantité négative en définissant formellement les nombres du même nom. Le contexte est différent dans le quatrième chapitre, qui a pour objet le transfert de connaissances d'un contexte culturel à un autre. Mahdi Abdeljaouad décrit l'importance des *Cours* de Bézout dans la conception de manuels de mathématiques en Turquie et en Égypte au XIXe siècle.

a quatrième partie, « Des ouvrages et des réformes d'enseignement », étudie l'impact des réformes sur les manuels qui les accompagnent et inversement le rôle des manuels dans la préparation de ces réformes. Valérie Legros s'intéresse à l'enseignement primaire sous la troisième république. Une époque qui voit un réel essor de l'édition scolaire ; la forme des ouvrages change, on recourt à l'illustration attractive et pédagogique (on regrette d'ailleurs de n'en voir aucune). Les manuels valorisent la participation active des élèves et accordent, en conformité avec les instructions des programmes, beaucoup de place aux problèmes de nature utilitaire et éducative.

es *Leçons d'arithmétique théorique et pratique* de Jules Tannery (1894), destinées à la classe de Mathématiques élémentaires, ne sont pas dans cet esprit. Hervé Renaud explique comment Tannery, souhaitant « faire descendre » des concepts fondamentaux au niveau de l'enseignement secondaire, renverse la tradition en donnant une construction des grandeurs à partir des seuls entiers naturels et, ce faisant, bâtit un ouvrage difficile, entre enseignement et recherche.

es deux autres chapitres de cette partie traitent de la question de la modernité dans l'enseignement. Rudolf Bkhouche aborde, de ce point de vue, l'enseignement de l'analyse (calcul infinitésimal) et de la géométrie (géométrie projective, du mouvement, transformations, coniques, calcul vectoriel) à partir du XIXe siècle. Arnaud Carsalade, François Goichot et Anne-Marie Marmier donnent une vue d'ensemble intéressante de la réforme des « mathématiques modernes » dans les années soixante, en la mettant en perspective avec le contexte épistémologique, politique, socio-économique ; en montrant le rôle majeur de l'APMEP dans sa mise en place, avec notamment la création des IREM, en disant enfin les raisons de son échec.

es chapitres de la cinquième partie (« Des ouvrages, des pratiques et des enseignements ») mettent en relation des pratiques et des instruments avec des mathématiques, les pratiques ouvrant parfois la voie à des mathématiques nouvelles. Dans le premier chapitre, Sophie Couteaud présente l'*Arithmétique par les gects*, publié en 1558 par Pierre Forcadel, qui fut un temps lecteur du Roi. L'ouvrage explique les techniques de calcul avec des jetons, encore beaucoup utilisés pour les comptes, grâce à des schémas et des exemples concrets. Si Forcadel ne fait pas preuve d'originalité, les sujets qu'il aborde à la fin du livre dépassent les connaissances nécessaires aux comptes et font davantage plaisir au mathématicien qu'il est.

a nécessité de fortifier des places a donné naissance, aux XVIe et XVIIe siècles, à des ouvrages destinés à enseigner et diffuser les techniques nouvelles, qui vont de pair avec l'évolution de la balistique et des stratégies de défense. Partant des travaux italiens du XVIe siècle, Frédéric Métin et Patrick Guyot nous montrent les principes et le style des traités de fortification, de la technique pure aux démonstrations géométriques. Un chapitre est consacré au mathématicien et militaire Samuel Marolois dont la foisonnante *Géométrie contenant la théorie et pratique d'icelle nécessaire à la fortification* de 1616 concilie l'esprit euclidien et les problématiques de la géométrie pratique. Ce chapitre se termine par la présentation de plusieurs propositions sur les divisions de figures et les *réductions* de polygones à des figures différentes de même aire.

► lest de géométrie et artillerie que Anne-Marie Aebischer et Hombeline Languereau ont choisi de parler, un thème qui n'est pas sans rapport avec les fortifications; le chapitre est centré sur François-Joseph Servois (1767-1847), qui fut professeur de mathématiques dans des écoles d'artillerie. Les auteures mettent en parallèle quelques propositions des Solutions peu connues de differens problèmes de géométrie pratique avec celles de Mascheroni ou de Carnot, destinées à des publics différents. L'enseignant d'aujourd'hui peut trouver dans ces Solutions de Servois matière nouvelle pour ses élèves, dès le collège. Pierre Ageron nous présente un volumineux traité manuscrit exhumé de la bibliothèque de Caen et curieusement baptisé Traité de fabricologie ou ergastique du poinct. Il a été publié par un certain Guillemme Le Vasseur, mathématicien et hydrographe qui vécut aux XVIe-XVIIe siècles. La fabricologie ou fabricométrie, termes imaginés par Le Vasseur, enseigne à manier la règle et le compas, à propos de problèmes dont beaucoup proviennent des *Eléments* d'Euclide, abordés d'un point de vue exclusivement technique. La collection de problèmes de la géométrie, c'est ce qu'il nomme ergastique du poinct, le point étant le principe générateur de la ligne, de la surface, de toutes les figures. Découpé en deux livres d'organisation identique, le livre explore le plan puis l'espace; Les figures géométriques sont soumises à une sorte

d'arithmétique reposant sur l'égalité (la *réduction*, terme utilisé dans le même sens que Marolois) et quatre opérations qu'il serait trop long de détailler. Un contenu riche, une pensée originale qu'il est intéressant de découvrir.

Louis Cholesky (1875-1918) est une figure emblématique de l'ingénieur savant, efficace et inventif dans ses différents rôles d'ingénieur de terrain, de mathématicien et d'enseignant. Le *Cours de topographie* et ses *Compléments*, le *Cours de calcul graphique*, tous trois manuscrits, ont été commandés à Cholesky par l'École spéciale des travaux publics, créée au début du XXe siècle. Ils sont ici présentés dans le contexte de l'histoire de l'ESTP et des besoins d'enseignement pour les formations dispensées par cette école. D. Tournés inscrit cet article dans le cadre plus large d'une interrogation sur les interactions entre savoir de mathématiciens et savoir de « praticiens », ici les ingénieurs du XIXe et de la première moitié du XXe siècle.

un des intérêts de ce recueil original est, comme nous l'avons dit, la pluralité des points de vue choisis. Un autre est de donner à découvrir, à côté des textes de référence de l'histoire des mathématiques, des ouvrages et des corpus moins connus, qui sortent donc des sentiers battus, des ouvrages aussi qui jalonnent l'histoire des mathématiques de l'antiquité au XXº siècle. Une familiarisation préalable avec les thèmes traités ou les ouvrages analysés est plus ou moins nécessaire d'un chapitre à l'autre. Mais, tout comme les points de vue et sujets développés ici embrassent le monde de la recherche, de l'enseignement et/ou de la culture mathématique, le lecteur qui ouvre ce recueil pourra, selon ses compétences, ses centres d'intérêt et ses aspirations, trouver à coup sûr du grain à moudre.

# Hommage à Claude Frasnay Premier directeur de l'Irem de Toulouse

Pierre Anglès, groupe Math-Physique Supérieur de l'Ires de Toulouse Center Cairos, Institut de Mathématiques de Toulouse www.icca7.ups-tlse.fr/cairos.htm

Je tiens à présenter mes vifs remerciements à Madame Nicole Frasnay, son épouse, pour m'avoir fourni de précieux renseignements et m'avoir autorisé à les publier. J'ai organisé une journée en son honneur, il y a plusieurs années, au département de mathématiques de l'université Paul Sabatier, journée à laquelle ont participé, entre autres, Roger Desq, directeur du département de mathématiques, Guy Terjanian, José Bertin, de l'université Paul Sabatier, Artibano Micali, ancien directeur du département de mathématiques de l'université de Montpellier et Daniel Parrochia, de l'université Jean Moulin de Lyon. Le recteur Philippe Joutard de l'académie de Toulouse avait tenu à participer au repas organisé en l'honneur du professeur Claude Frasnay et de madame Nicole Frasnay afin de lui manifester sa reconnaissance pour tout son travail, dans l'éloge qu'il eut plaisir à prononcer, au restaurant des mûriers du lycée professionnel Renée Bonnet.

Claude Frasnay est, à mon sens, le porte-parole du Kairos mathématique, à plusieurs titres. La pensée grecque avait imaginé un triple visage de la temporalité avec les noms de Aion ; Chronos ; Kairos . Ces trois dieux sont caractérisés respectivement par les trois adjectifs suivants : éternel, docile, indomptable. Cette "trinité" est peut-être, une copie grecque de la trimurti de la pensée hindoue : Brahma ; Vishnou ; Shiva. Aion est comme Brahma le visage impassible du temps ; Chronos, comme Vishnou, dieu syncrétique du temps crée la loi et la protège ; Kairos comme Shiva anéantit le monde pour le recréer à sa guise : c'est l'aspect momentuel du temps.

es épistémologues ont analysé comment la pensée mathématique, comme telle, est soumise à la condition du temps, mais elle aussi, et en raison de cette condition, engagée dans une histoire. On doit parler d'une historicité propre de la pensée mathématique. Le processus même par lequel sont dégagées des structures de plus en plus générales caractérise l'allure essentielle. La réduction, qui correspond à une absorption, des géométries à l'algèbre sous-jacente à la théorie des groupes en est un exemple extrêmement significatif. C'est ici véritablement que peut intervenir l'idée du Kairos mathématique dont Claude Frasnay est un vrai porte-parole.

Ses travaux sur l'axiomatique de la géométrie plane euclidienne, sur les corps ordonnés intéressant la géométrie plane, sa thèse de doctorat es sciences sur quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes, soutenue à Paris en 1965, sous la direction de Roland Fraïssé qui deviendra son ami, sa construction de la mathématique finitaire en constituent des preuves manifestes.

Laprès le divorce de ses parents à des amis de son père, Eugène, mais suivi régulièrement par ce dernier. Claude trouve refuge dans l'étude où il excelle dès l'école primaire à Argenteuil. Il intègre, avec une bourse, l'Ecole Normale d'instituteurs de Seine et Oise, logée en 1943 dans les locaux du lycée Hoche de Versailles. Après un échec au concours d'entrée à l'Ecole Normale de Saint-Cloud, il poursuit ses études à la Faculté des Sciences de Grenoble, entre 1949 et 1951. Il choisit d'effectuer son service militaire en Allemagne à l'école d'artillerie d'Idar-Oberstein. A son retour, il intègre comme auditeur libre l'Ecole Normale Supérieure, renonce à se présenter à l'agrégation, obtient le CAPES, puis obtient l'agrégation l'année suivante, à l'issue d.une préparation effectuée à la Faculté des Sciences de Toulouse, dans un très bon rang. Son premier poste est Alger, qu.il choisit en raison de son emplacement. Nommé d'abord au lycée Gautier, il obtient en 1957 un poste en classes préparatoires au lycée Bugeaud. Il publie des articles dans Alger-Math., rencontre Roland Fraïssé. Entre temps, il se marie en

1955 et a deux garçons: Laurent et Jean-Marc. Il obtient un poste de maître-assistant à Grenoble en 1961. Après la soutenance de son doctorat ès sciences, il revient à Toulouse où il poursuit sa carrière jusqu'à sa retraite, en position de surnombre, en octobre 1995, comme professeur titulaire d.une chaire d'Algèbre et Combinatoire.

Premier directeur de l'IREM de Toulouse, officier des palmes académiques, capitaine de réserve d'artillerie, Claude Frasnay, avec l'élégance du dieu Kairos était un athlète dans sa jeunesse, un randonneur averti, un nageur confirmé. A titre purement personnel, je voudrais rappeler qu'il me montra un jour, le dollar canadien qu'il avait gagné de Paul Erdös lui- même, pour avoir résolu un problème très difficile. Comme directeur de l'Irem de Toulouse, lors de la mise en route des nouveaux programmes, Claude Frasnay, infatigable, savait distiller ses connaissances à tous avec une élégance, une culture hors du commun. Je pense ainsi à sa présentation remarquable: "charges et doublets dans un espace affine"; de la barycentration ou à ses moutures successives sur les tripodes pour démontrer le théorème de Morley.

Sa devise aurait pu être le mot suivant de Henri Bosco : "L'on n'atteint à la paix du cœur, si elle est de ce monde, que par le travail inlassable, la déception fréquente et le sentiment d'une juste humilité".

.

## Groupes de recherche de l'IRES

Titre du groupe	Responsable du groupe
Ecole Primaire	Isabelle LAURENÇOT-SORGUS
Premier Cycle	Yves CHASSIN
Lycée	Hussein HAMMOUD
Lycée professionnel	Hamid HADIDOU
Apprendre Ensemble	Christophe RABUT
Didactique des mathématiques	Jérôme LOUBATIÈRES
Évaluation	André ANTIBI
Géométrie dynamique	Jean-Jacques DAHAN
Hippocampe	Xavier BRESSAUD
Jeux mathématiques	Gérard MARTIN
Maths en Jeans	Xavier BRESSAUD
Maths et internet	Abdel SARRAF
Maths-Physique Supérieur	Pierre ANGLÈS
Rallye mathématique sans frontières	André ANTIBI
Rallye Sciences Expérimentales	Xavier BUFF
Statistique et probabilités	Brigitte CHAPUT
Histoire des Mathématiques	Michel GUILLEMOT

## ... de l'IREM



Lors de l'année 2012-2013 une réflexion avait été menée quant à la transformation de l'IREM en IRES (*Institut de Recherche pour l'Enseignement des Sciences*). Les animateurs de l'IREM s'étant prononcés favorablement ainsi que le Conseil d'Administration, l'année 2013-2014 a vu la mise en place de réunions avec pour objectifs de définir les modalités de cette évolution : définition de l'IRES, rédaction des statuts en lien avec différents partenaires de l'Université représentants les différents services et les différentes disciplines concernées, ainsi qu'avec le Rectorat. Une concertation a également eu lieu avec le service juridique de l'université.

La transformation a été validée par le conseil d'administration de l'UPS, en conséquence l'IREM a cédé la place à l'IRES depuis le 7 juillet 2014.

## ... à l'IRES



L'Autan Moderne est une publication de l'IRES de Toulouse

IRES UFR FSI Université Toulouse 3 Paul Sabatier 31062 TOULOUSE cedex 9

courriel: ires@univ-tlse3.fr

Directeur de publication

**Xavier BUFF** 

Chargé de la publication

**Hussein HAMMOUD** 

Autan Moderne n°1

Janvier 2015

ISBN: 978-2-918013-08-2 EAN: 9782918013082