Théorie des jeux à somme nulle

IRES Toulouse, Jérôme Renault, 25-01-2018

La théorie des jeux étudie les interactions stratégiques entre individus. mathématiques, économie, biologie, philosophie, sociologie, informatique...

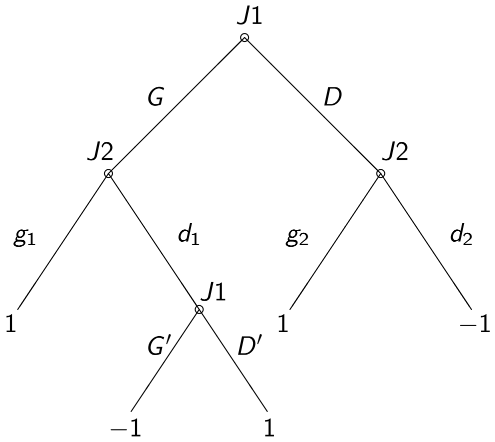
Jeux à somme nulle: 2 joueurs appelés J1 et J2, tout ce que gagne un joueur est perdu par l'autre. Jeux de pure compétition.

1. Jeux à information parfaite: séquentiels, on joue l'un après l'autre.
2. Jeux matriciels : simultanés, finis.
3. Quelques applications/illustrations

1. Jeux à information parfaite

Ils se représentent par des arbres. Par convention, les feuilles contiennent les paiements du J1.

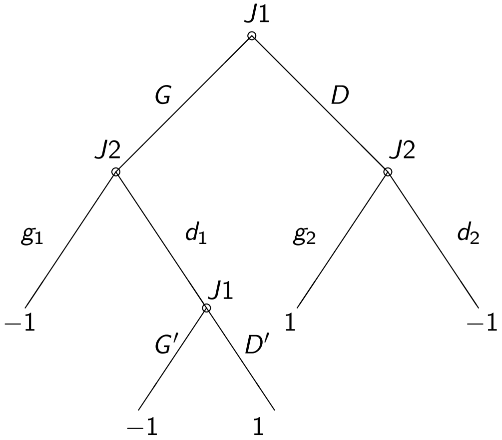
Exemple 1:



Préférez-vous être le joueur 1 ou le joueur 2 ?

Que doit jouer le joueur 1 au premier coup ?

Exemple 2:



Préférez-vous être le joueur 1 ou le joueur 2 ?
Que doit jouer le joueur 1 au premier coup ?

Jeux à information parfaite "Gagnant-Perdant"

Données du jeu:

• Un arbre enraciné: X ensemble *fini* des noeuds de l'arbre (positions du jeu), $r \in X$ position initiale (c'est là que le jeu commence).
Chaque noeud x différent de r a un unique prédecesseur noté $\theta(x)$.
Si $y = \theta(x)$, on dit que x est un successeur de y.
Certains noeuds n'ont pas de successeur, on les appelle les noeuds terminaux.

• Qui joue quand ? On a une partition de X en X_1 (noeuds où c'est au joueur 1 de jouer), X_2 (noeuds où c'est au joueur 2 de jouer), T (noeuds terminaux).

• Qui gagne la partie ? A chaque noeud terminal on associe un paiement: +1 si le J1 gagne la partie, -1 si le J2 gagne la partie.

Stratégies:

J1: $s_1 = (s_1(x))_{x \in X_1}$, où $s_1(x)$ est un successeur de x pour tout x de X_1.
J2: $s_2 = (s_2(x))_{x \in X_2}$, où $s_2(x)$ est un successeur de x pour tout x de X_2.
Un couple de stratégies (s_1, s_2) induit une unique partie du jeu, on note $g(s_1, s_2) = 1$ si le J1 gagne cette partie, $g(s_1, s_2) = -1$ sinon.

Définitions:

s_1^* est une stratégie gagnante du J1 si: $\forall s_2, g(s_1^*, s_2) = +1$.
s_2^* est une stratégie gagnante du J2 si: $\forall s_1, g(s_1, s_2^*) = -1$.

Proposition: Un et un seul des 2 joueurs a une stratégie gagnante, c'est-à-dire une et une seule des 2 propositions suivantes est vraie:
A) il existe s_1^* telle que $\forall s_2, g(s_1^*, s_2) = +1$,
B) il existe s_2^* telle que $\forall s_1, g(s_1, s_2^*) = -1$.

E. Zermelo. *Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge 1912)*

Résoudre le jeu c'est déterminer quel joueur a des stratégies gagnantes, et trouver une (ou toutes les) stratégie gagnante.

Preuve de la proposition: récurrence sur le nombre de noeuds de l'arbre.
Pratique: Récurrence amont (*Backwards induction*). Apprentissage profond (Alphazero)

Corollaire: Au jeu de Go, soit les noirs ont une stratégie gagnante, soit les blancs ont une stratégie gagnante. (personne ne sait laquelle des deux propositions est vraie)

Remarque: c'est (beaucoup) plus compliqué quand il peut y avoir une infinité d'étapes.

Définitions:
s_1^* est une stratégie gagnante du J1 si: $\forall s_2, g(s_1^*, s_2) = +1$.
s_2^* est une stratégie gagnante du J2 si: $\forall s_1, g(s_1, s_2^*) = -1$.

Proposition: Un et un seul des 2 joueurs a une stratégie gagnante, c'est-à-dire une et une seule des 2 propositions suivantes est vraie:
A) il existe s_1^* telle que $\forall s_2, g(s_1^*, s_2) = +1$,
B) il existe s_2^* telle que $\forall s_1, g(s_1, s_2^*) = -1$.

E. Zermelo. *Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge 1912)*

Résoudre le jeu c'est déterminer quel joueur a des stratégies gagnantes, et trouver une (ou toutes les) stratégie gagnante.

Preuve de la proposition: récurrence sur le nombre de noeuds de l'arbre.
Pratique: Récurrence amont (*Backwards induction*). Apprentissage profond (Alphazero)

Corollaire: Au jeu de Go, soit les noirs ont une stratégie gagnante, soit les blancs ont une stratégie gagnante. (personne ne sait laquelle des deux propositions est vraie)

Remarque: c'est (beaucoup) plus compliqué quand il peut y avoir une infinité d'étapes.

Définitions:

s_1^* est une stratégie gagnante du J1 si: $\forall s_2, g(s_1^*, s_2) = +1$.
s_2^* est une stratégie gagnante du J2 si: $\forall s_1, g(s_1, s_2^*) = -1$.

Proposition: Un et un seul des 2 joueurs a une stratégie gagnante, c'est-à-dire une et une seule des 2 propositions suivantes est vraie:
A) il existe s_1^* telle que $\forall s_2, g(s_1^*, s_2) = +1$,
B) il existe s_2^* telle que $\forall s_1, g(s_1, s_2^*) = -1$.

E. Zermelo. *Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge 1912)*

Résoudre le jeu c'est déterminer quel joueur a des stratégies gagnantes, et trouver une (ou toutes les) stratégie gagnante.

Preuve de la proposition: récurrence sur le nombre de noeuds de l'arbre.
Pratique: Récurrence amont (*Backwards induction*). Apprentissage profond (Alphazero)

Corollaire: Au jeu de Go, soit les noirs ont une stratégie gagnante, soit les blancs ont une stratégie gagnante. (personne ne sait laquelle des deux propositions est vraie)

Remarque: c'est (beaucoup) plus compliqué quand il peut y avoir une infinité d'étapes.

Chomp ! ou le mange-savon. *David Gale (1921-2008)*
On fixe 2 entiers $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on pose $P(n,m) = \{0,...,n\} \times \{0,...,m\}$. On définit le jeu $\Gamma(n,m)$ suivant, où les joueurs jouent à tour de rôle. Au début du jeu, une pierre est placée sur chaque point de la grille $P(n,m)$. Le joueur 1 commence et choisit une pierre. Il enlève cette pierre ainsi que toutes les pierres ayant l'abscisse et l'ordonnée au moins égales à celles de la pierre choisie. Puis c'est au joueur 2 de jouer: il choisit une des pierres restantes, enlève cette pierre ainsi que toutes les pierres ayant l'abscisse et l'ordonnée au moins égales à celles de la pierre qu'il vient de choisir. Etc... Le jeu continue et le joueur qui prend la dernière pierre (qui est forcément $(0,0)$) a perdu.

1. Pour $n \geq 1$, résoudre le jeu $\Gamma(n,n)$.
2. Pour n et m quelconques, déterminer quel joueur a une stratégie gagnante dans $\Gamma(n,m)$
3. Pb ouvert: trouver un premier coup gagnant dans $\Gamma(n,m)$.

Chomp ! ou le mange-savon. *David Gale (1921-2008)*
On fixe 2 entiers $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on pose $P(n,m) = \{0,...,n\} \times \{0,...,m\}$. On définit le jeu $\Gamma(n,m)$ suivant, où les joueurs jouent à tour de rôle. Au début du jeu, une pierre est placée sur chaque point de la grille $P(n,m)$. Le joueur 1 commence et choisit une pierre. Il enlève cette pierre ainsi que toutes les pierres ayant l'abscisse et l'ordonnée au moins égales à celles de la pierre choisie. Puis c'est au joueur 2 de jouer: il choisit une des pierres restantes, enlève cette pierre ainsi que toutes les pierres ayant l'abscisse et l'ordonnée au moins égales à celles de la pierre qu'il vient de choisir. Etc... Le jeu continue et le joueur qui prend la dernière pierre (qui est forcément $(0,0)$) a perdu.

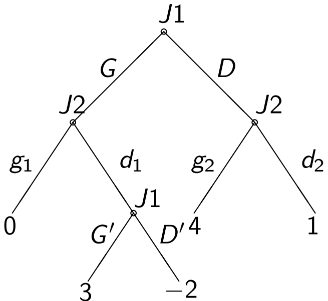
1. Pour $n \geq 1$, résoudre le jeu $\Gamma(n,n)$.
2. Pour n et m quelconques, déterminer quel joueur a une stratégie gagnante dans $\Gamma(n,m)$
3. Pb ouvert: trouver un premier coup gagnant dans $\Gamma(n,m)$.

Paiements généraux: le paiement d'un noeud terminal est un nombre réel (somme que doit payer le J2 au joueur J1)

Proposition: Il existe un unique réel v satisfaisant :
(il existe s_1^* t.q. $\forall s_2, g(s_1^*, s_2) \geq v$, et il existe s_2^* t.q. $\forall s_1, g(s_1, s_2^*) \leq v$)
Ce nombre s'appelle la *valeur* du jeu. C'est la somme équitable que le joueur 1 devrait payer pour avoir le droit de jouer. On dit que s_1^* et s_2^* sont des stratégies *optimales*.

Corollaire: aux Echecs, soit le J1 a une stratégie gagnante, soir le J2 a une stratégie gagnante, soit chacun des joueurs a une stratégie qui lui assure au moins le match nul.

Exemple 3: Quelle est la valeur de ce jeu ?



Jeux matriciels

Etant donné une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, on définit le *jeu matriciel* où: simultanément, le J1 choisit une ligne i et le J2 choisit une colonne j. Puis le J2 paye $a_{i,j}$ au J1. Les 2 joueurs connaissent la matrice A.

Exemples:

4) $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, que jouez-vous ?

Ici, il existe une ligne i telle que quelque soit la colonne j, $a_{i,j} \geq 1$ et il existe une colonne j telle que quelque soit la ligne i, $a_{i,j} \leq 1$.

5) Pierre-Feuille-Ciseaux: $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_2 & F_2 & C_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ F_1 \\ C_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Etant donné une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, on définit le *jeu matriciel* où: simultanément, le J1 choisit une ligne i et le J2 choisit une colonne j. Puis le J2 paye $a_{i,j}$ au J1. Les 2 joueurs connaissent la matrice A.

Exemples:

4) $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, que jouez-vous ?

Ici, il existe une ligne i telle que quelque soit la colonne j, $a_{i,j} \geq 1$ et il existe une colonne j telle que quelque soit la ligne i, $a_{i,j} \leq 1$.

5) Pierre-Feuille-Ciseaux: $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_2 & F_2 & C_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ F_1 \\ C_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Matching Pennies (ou le Penalty): $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$,

Imaginons qu'on doive écrire un programme informatique qui joue (en tant que joueur 1) à ce jeu, et que ce programme est destiné à être disponible en ligne sur internet où tout le monde peut venir jouer, éventuellement plusieurs fois, pour des paiements de 1 euro. Comment écrire un tel programme ?

Même question si la matrice est: $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$?

Matching Pennies (ou le Penalty): $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$,

Imaginons qu'on doive écrire un programme informatique qui joue (en tant que joueur 1) à ce jeu, et que ce programme est destiné à être disponible en ligne sur internet où tout le monde peut venir jouer, éventuellement plusieurs fois, pour des paiements de 1 euro. Comment écrire un tel programme ?

Même question si la matrice est: $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$?

Définition: Une *stratégie mixte* du J1 est un vecteur (de probabilités) $x = (x_1, ..., x_n)$ dans $I\!R^n_+$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. De même, une stratégie mixte du J2 est un vecteur $y = (y_1, ..., y_p)$ dans $I\!R^p_+$ tel que $\sum_{j=1}^p y_j = 1$.

Définition: On dit que le jeu matriciel A a une valeur v s'il existe des stratégies mixtes x^* et y^* telles que:

$$\forall j, \sum_{i=1}^n x_i^* a_{i,j} \geq v, \text{ et } \forall i, \sum_{j=1}^p a_{i,j} y_j^* \leq v.$$

x^* et y^* sont alors dites stratégies optimales.
v est alors unique et représente le "prix équitable du jeu".
L'existence de la valeur équivaut à $\max_{x \in \Delta(I)} \min_{y \in \Delta(J)} \sum_{i \in I, j \in J} x_i y_j a_{i,j} = \min_{y \in \Delta(J)} \max_{x \in \Delta(I)} \sum_{i \in I, j \in J} x_i y_j a_{i,j}$.

Exemple : $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$
$v = 1/5$, stratégies optimales : 2/5 H + 3/5 B pour le joueur 1 et 2/5 G + 3/5 D pour le J2.

Théorème du minmax de Von Neumann, 1928: Tout jeu matriciel a une valeur. Autrement dit, pour toute matrice $A \in I\!R^{I \times J}$,

$$\max_{x\in\Delta(I)} \min_{y\in\Delta(J)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i y_j a_{i,j} = \min_{y\in\Delta(J)} \max_{x\in\Delta(I)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i y_j a_{i,j}, \text{ qu'on note val(A)}$$

$\mathrm{Val}(A+cst) = \mathrm{Val}(A) + cst$, $\mathrm{Val}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Val}(A)$ pour $\lambda \geq 0$.

L'opérateur val est continue de $I\!R^{n\times p}$ dans $I\!R^n$, non différentiable.
$\frac{\mathrm{Val}(A+\lambda B)-\mathrm{Val}(A)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \max_{x\in O^1(A)} \min_{y\in O^2(A)} xBy$ $(= \min\max\ldots)$

Se généralise à des espaces de stratégies plus généraux (Théorème de Sion, Théorème de Ville...).

Remarque: les jeux simultanés peuvent sembler très particuliers, mais en fait ils sont plus généraux que les jeux à info parfaite. (Un jeu à info parfaite a même une valeur en stratégies *pures*, sans à dire sans qu'il n'y ait besoin de jouer aléatoirement).

Preuve du théorème du minmax par séparation dans $I\!R^p$.
$A \in I\!R^{I\times J}$, où $I=\{1,...n\}$ et $J=\{1,...,p\}$.
Pour x dans $\Delta(I)$ et y dans $\Delta(J)$, on note $xAy=\sum_{i\in I, j\in J} x_i y_j a_{i,j}$ le paiement espéré. On définit:

$\alpha = \max_{x\in\Delta(I)} min_{y\in\Delta(J)} xAy$ et $\beta = \min_{y\in\Delta(J)} \max_{x\in\Delta(I)} xAy$.

On a facilement $\alpha \leq \beta$, il faut montrer $\alpha \geq \beta$.

On introduit $\bar\beta = (\beta,\beta,...,\beta) \in I\!R^p$, et

$$C=\{(xA1, xA2, ..., xAp), x\in\Delta(I)\} - I\!R^p_+.$$

Si $\bar\beta \in C$, OK.
Supposons $\bar\beta \notin C$, on sépare ! Il existe $y=(y_1,...,y_p)$ dans $I\!R^p$ et $\varepsilon>0$ tels que:

$$<\bar\beta, y> \geq \sup_{z\in C} <z,y> + \varepsilon.$$

$y\neq 0$, $y\geq 0$. On divise par $S=\sum_j y_j>0$ et on pose $y^*=y/S\in\Delta(J)$:

$$\beta \geq \max_{x\in\Delta(I)} xAy^* + \varepsilon/S \geq \beta+\varepsilon/S.$$

contradiction.

A) Prise de décision dans le pire des cas

Soit un agent pouvant investir aujourd'hui dans 3 actifs i_1, i_2 et i_3, tous de prix 1 (l'unité est par exemple le millier d'euros). L'état du monde demain est inconnu, il y a 3 possibilités j_1, j_2 et j_3. La matrice A suivante indique le rendement de chaque actif en fonction de l'état du monde:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Par exemple si l'état demain est j_2, alors l'actif i_2 rapportera 0. L'actif i_3 est sans risque, il rapporte 1 quel que soit l'état du monde demain.
L'agent veut investir 5 (milliers d'euros) aujourd'hui et peut repartir son investissement sur plusieurs actifs. Il veut maximiser sa richesse demain dans le pire des cas, quel est son investissement optimal aujourd'hui ?

Réponse: résoudre $\max_{x \in \Delta(I)} \min_j \sum_i x_i a_{i,j}$. On trouve $\mathrm{val}(A) = 6/5$, investir 5*0,6=3 sur i_1 et 5*0,4=2 sur i_2, 0 sur i_3.

B) Un poker simplifié : le bluff

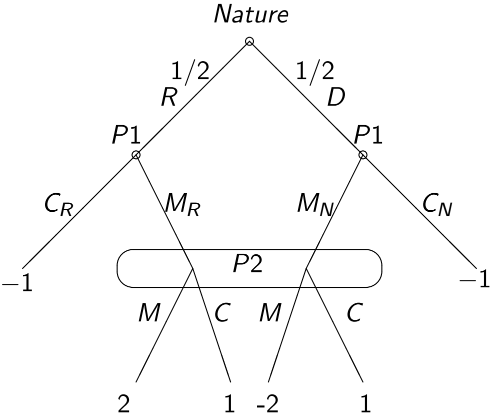
2 joueurs jouent au jeu suivant. Ils commencent par miser chacun 1 euro, c'est-à-dire qu'ils mettent chacun 1 euro au centre de la table.

• Puis un jeu de 52 cartes est battu uniformément, une des cartes est tirée et observée uniquement par le joueur 1

• Le joueur 1 peut alors quitter le jeu (il a alors perdu l'euro qu'il a misé), ou bien rester dans le jeu en rajoutant un euro supplémentaire au centre de la table.

• Si le joueur 1 n'a pas quitté le jeu, le joueur 2 a le choix entre se coucher (c'est-à-dire quitter le jeu, le jeu est alors fini et au final le joueur 1 aura gagné un euro) ou bien rester dans le jeu en rajoutant également 1 euro supplémentaire au centre de la table. Dans ce dernier cas, la carte sélectionnée est montrée aux 2 joueurs: si elle est rouge, le joueur 1 gagne et empoche l'argent qui est au milieu de la table (il aura alors gagné 2 euros), si la carte est noire c'est le joueur 2 qui gagne et empoche l'argent situé au centre de la table.

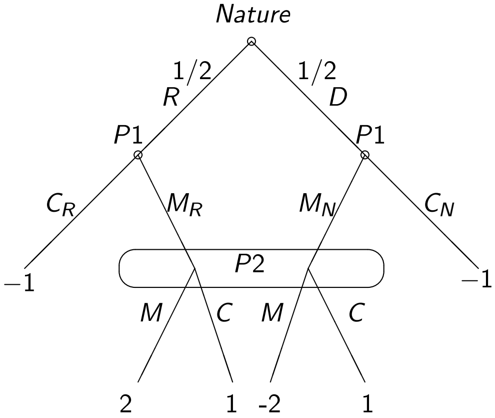
En tant que joueur 1, combien êtes-vous prêt à payer pour participer ? Avec quelle fréquence le joueur 1 doit-il bluffer ? Avec quel fréquence le joueur 2 doit-il rester dans le jeu et aller voir la carte du joueur 1 ?



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\ \begin{array}{c} C_R, C_N \\ C_R, M_N \\ M_R, C_N \\ M_R, M_N \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(rem: paiements espérés)

J1 doit miser si R et bluffer 1/3 du temps si N, J2 doit miser 2/3 du temps. Valeur=1/3



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\ \begin{array}{c} C_R, C_N \\ C_R, M_N \\ M_R, C_N \\ M_R, M_N \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(rem: paiements espérés)

J1 doit miser si R et bluffer 1/3 du temps si N, J2 doit miser 2/3 du temps. Valeur=1/3

C) Prédire la météo sans connaître le temps

On étudie les précipitations chaque jour $t = 1, ..., T$ à midi à un endroit donné: $y_t = 1$ s'il pleut, $y_t = 0$ sinon.
Un prévisionniste doit décider chaque soir s'il va pleuvoir le lendemain à midi. Il donne des prévisions probabilistes dans une grille fixée:

$$p_t = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, ..., \frac{N-1}{N}, 1\}.$$

A la fin de la période T, quand doit-on considérer que le prévisionniste a été bon ?

On introduit, pour chaque p de la grille, la perfomance $K(p) = \left| p - \frac{\sum_{s=1}^{T} \mathbf{1}_{p_s = p} y_s}{\sum_{s=1}^{T} \mathbf{1}_{p_s = p}} \right| \in [0, 1]$. Les prévisions sont considérées bonnes si la perf moyenne $K = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} K_T(p_t)$ est petite.

Théorème: Pour T assez grand ($\geq 8N^6$), il existe une stratégie aléatoire du prévisionniste telle que quelque soit $(y_1, ..., y_T)$, l'espérance de K est au plus $\frac{2}{N}$.

C) Prédire la météo sans connaître le temps

On étudie les précipitations chaque jour $t = 1, ..., T$ à midi à un endroit donné: $y_t = 1$ s'il pleut, $y_t = 0$ sinon.
Un prévisionniste doit décider chaque soir s'il va pleuvoir le lendemain à midi. Il donne des prévisions probabilistes dans une grille fixée:

$$p_t = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, ..., \frac{N-1}{N}, 1\}.$$

A la fin de la période T, quand doit-on considérer que le prévisionniste a été bon ?

On introduit, pour chaque p de la grille, la perfomance $K(p) = \left| p - \frac{\sum_{s=1}^{T} \mathbf{1}_{p_s = p} y_s}{\sum_{s=1}^{T} \mathbf{1}_{p_s = p}} \right| \in [0, 1]$. Les prévisions sont considérées bonnes si la perf moyenne $K = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} K_T(p_t)$ est petite.

Théorème: Pour T assez grand ($\geq 8N^6$), il existe une stratégie aléatoire du prévisionniste telle que quelque soit $(y_1, ..., y_T)$, l'espérance de K est au plus $\frac{2}{N}$.

C) Prédire la météo sans connaître le temps

On étudie les précipitations chaque jour $t = 1, ..., T$ à midi à un endroit donné: $y_t = 1$ s'il pleut, $y_t = 0$ sinon.
Un prévisionniste doit décider chaque soir s'il va pleuvoir le lendemain à midi. Il donne des prévisions probabilistes dans une grille fixée:

$$p_t = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, ..., \frac{N-1}{N}, 1\}.$$

A la fin de la période T, quand doit-on considérer que le prévisionniste a été bon ?

On introduit, pour chaque p de la grille, la perfomance $K(p) = \left| p - \frac{\sum_{s=1}^{T} \mathbf{1}_{p_s = p} y_s}{\sum_{s=1}^{T} \mathbf{1}_{p_s = p}} \right| \in [0, 1]$. Les prévisions sont considérées bonnes si la perf moyenne $K = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} K_T(p_t)$ est petite.

Théorème: Pour T assez grand ($\geq 8N^6$), il existe une stratégie aléatoire du prévisionniste telle que quelque soit $(y_1, ..., y_T)$, l'espérance de K est au plus $\frac{2}{N}$.

D) Coopération basée sur des menaces

Les jeux à somme nulle servent aussi à étudier les jeux *répétés* à n joueurs de somme quelconque.

Exemple: le dilemme du prisonnier $\begin{array}{ccc} & C_2 & D_2 \\ C_1 & & \\ D_1 & & \end{array}$ $\begin{array}{c} \\ C_1 \\ D_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_2 & D_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (-1,2) \\ (2,-1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$

Si on joue le jeu une fois, le seul équilibre est (D_1, D_2), avec des mauvais paiements (0,0).

Si on répète le jeu indéfiniment, on peut soutenir à l'équilibre la répétition de (C_1, C_2) (bon paiements), chaque joueur menaçant l'autre de représailles en cas déviation.

Les jeux à somme nulle permettent de quantifier les niveaux de menaces pour chaque joueur. On aboutit au "Folk Théorème": les paiements d'équilibres du jeu répété sont les paiements réalisables où chaque joueur a au moins son niveau de menace.

Et aussi : Jeux plus élaborés : combinent un aspect “dynamique" et un aspect “choix simultanés". A chaque étape, les joueurs vont jouer un jeu matriciel, mais:
On ne joue pas forcément à chaque étape le même jeu matriciel (jeux stochastiques)
Les joueurs ne connaissent pas forcément la matrice qu'ils jouent (jeux à information incomplète)
Les joueurs n'observent pas forcément les actions de leur adversaire à la fin de chaque étape (jeux avec signaux).

Exemples:

Un jeu d'arrêt $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1^* \\ 1^* & -1^* \end{pmatrix} \end{array}$,

The Big Match: $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1^* & 0^* \end{pmatrix} \end{array}$

Jeu sans valeur: *"pick the largest integer".*