

Introduction à la modélisation Mathématique

EDOs et Dynamique des populations

Fanny Delebecque

Institut de Mathématiques de Toulouse – Université Toulouse 3

25 janvier 2018

Modéliser l'évolution d'une population...

Un peu d'histoire : Euler (1760) *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*

But : Calculer/prévoir l'évolution de la population d'une ville ou d'une province pour une certaine année.

Euler (1760)

Si p_n représente la population à l'année n , Euler propose une relation de récurrence $p_{n+1} = \lambda p_n$, ce qui conduit à une suite géométrique, λ représentant le taux d'évolution de la population.

À noter : On peut aussi adopter une représentation en temps continu grâce à une équation différentielle

$$p(t + \Delta_t) - p(t) = \lambda p(t) \Delta_t$$

qui conduit à l'équation différentielle $p'(t) = \lambda p(t)$.

Modéliser l'évolution d'une population...

Un peu d'histoire : Malthus (1798)

Modélisation de la population humaine par une suite géométrique tandis que la capacité de reproduction est une suite arithmétique.

Proposition de limitation des naissances!!!

Un peu d'histoire : Verhulst (1840)

Remise en question du modèle de croissance malthusienne pour le modèle logistique : *Prise en compte de la limitation de la population.*

Idée :

- Accroissement de population proportionnel à la population pour des petites valeurs (\sim Malthus)
- Facteur limitant quand la population devient grande.

1837 : prévision de la population française en 1930 : 40 millions (en fait, 41,5 en 1931... pas loin!).

Modéliser l'évolution d'une population...

Aujourd'hui : modèle de croissance logistique de Verhulst encore très utilisé (en biologie, démographie, médecine...)

2 modèles logistiques :

- modèle logistique discret : suite p_n à l'année n , (variable discrète)
- modèle logistique continu : la population est une fonction du temps (variable continue)

Modèle continu : équation différentielle que l'on sait résoudre, comportement connu

Modèle discret : grande variabilité des comportement quand les valeurs des paramètres varient (comportement chaotique?)

Quelques exemples de modèles plus complexes...

Étude de populations en interaction :

- Étude des populations de Lynx et de lièvres des neiges collectées par La Compagnie de la baie d'Hudson au XIX^{eme} siècle.
- Alfred James Lotka (1925), Vito Volterra (1926) puis appliqué au sommeil paradoxal modèle AIM (Allan Hobson, 1990-98)
- Beaucoup de raffinements et de dérivés : proie-prédateur, compétition, symbiose, modèles de pêche, modèles avec migration, modèles de populations structurées, études de génomie, modèles d'épidémiologie

- 1 Équations différentielles ordinaires, rappels, exemples
 - C'est quoi une EDO ? Exemples...
 - Vocabulaire / Définitions / Résultats principaux
 - Comportements possibles d'équations différentielles autonomes
- 2 Dynamique des populations
 - Modélisation de la dynamique d'une population
 - Populations en interaction
 - Épidémies
- 3 Simulations Numériques
 - Construction des méthodes numériques
 - Convergence des Méthodes numériques
 - Simulations numériques pour le système de Volterra Lotka

C'est quoi une EDO d'ordre 1 ?

C'est une équation qui relie une fonction et sa dérivée et dont la solution est une fonction dérivable.

Formalisme : $y'(t) = F(t, y(t))$ où F est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Solution de $y'(t) = F(t, y(t))$ sur un intervalle I : fonction dérivable y sur I telle que

$$\forall t \in I, y'(t) = F(t, y(t)).$$

C'est quoi une EDO d'ordre 1 ?

C'est une équation qui relie une fonction et sa dérivée et dont la solution est une fonction dérivable.

Formalisme : $y'(t) = F(t, y(t))$ où F est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Solution de $y'(t) = F(t, y(t))$ sur un intervalle I : fonction dérivable y sur I telle que

$$\forall t \in I, y'(t) = F(t, y(t)).$$

Quelques exemples :

- *linéaires du 1er ordre à coefficients constants :*

$$y'(t) + ay(t) = b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Solution de l'éq. homogène ($b = 0$) : $y_H(t) = Ke^{-at}$, $K \in \mathbb{R}$.

Solution particulière y_p de $y'(t) + ay(t) = b$, (astucieuse ou obtenue par la variation de la constante)

Solution générale de $y'(t) + ay(t) = b$: superposition de y_H et y_p :
 $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$.

Exemple : $y'(t) + y(t) = 4t^2$.

C'est quoi une EDO d'ordre 1 ?

Quelques exemples :

- *linéaire à coefficients variables* : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$,
Solution de l'éq homogène : $y(t) = Ke^{A(t)}$ où A est une primitive de a et $K \in \mathbb{R}$.
Solution particulière y_p
Solution générale : superposition de y_H et y_p : $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$.
Exemple : $y'(t) + 5ty(t) = e^t$
- *une équation non linéaire...* : $y'(t) = y(t)^2 + 5t...$
Là c'est plus compliqué...
- **EDO autonome** : équation différentielle $y'(t) = F(y(t))$. La fonction F ne dépend pas de t , mais seulement de $y(t)$.

"Problème de Cauchy"

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

"Problème de Cauchy"

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Données initiales : temps initial $t_0 \in I$ (on prendra $t_0 = 0$), donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}$

"Problème de Cauchy"

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Données initiales : temps initial $t_0 \in I$ (on prendra $t_0 = 0$), donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}$

Problème : Trouver $J \subset I$ intervalle contenant 0 et $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonction dérivable sur J telle que :

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) & \forall t \in J, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

"Problème de Cauchy"

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Données initiales : temps initial $t_0 \in I$ (on prendra $t_0 = 0$), donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}$

Problème : Trouver $J \subset I$ intervalle contenant 0 et $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonction dérivable sur J telle que :

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) & \forall t \in J, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Définitions

Solution locale : (J, y) est *solution locale* si (J, y) est solution du problème de Cauchy (1) et J voisinage de 0 dans I .

"Problème de Cauchy"

Cadre : I intervalle ouvert de \mathbb{R} , $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Données initiales : temps initial $t_0 \in I$ (on prendra $t_0 = 0$), donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}$

Problème : Trouver $J \subset I$ intervalle contenant 0 et $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonction dérivable sur J telle que :

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) & \forall t \in J, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Définitions

Solution locale : (J, y) est *solution locale* si (J, y) est solution du problème de Cauchy (1) et J voisinage de 0 dans I .

Solution maximale : Une solution locale (J, y) est dite *maximale* si elle ne peut pas être étendue comme solution sur un intervalle plus grand que J .

Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas \mathcal{C}^1)

On suppose que f est continue par rapport à la première variable et \mathcal{C}^1 par rapport à la deuxième.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas \mathcal{C}^1)

On suppose que f est continue par rapport à la première variable et \mathcal{C}^1 par rapport à la deuxième.

Alors il existe une unique solution maximale (J, y) du problème de Cauchy (1) et J est de la forme $J = [0, T[$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas \mathcal{C}^1)

On suppose que f est continue par rapport à la première variable et \mathcal{C}^1 par rapport à la deuxième.

Alors il existe une unique solution maximale (J, y) du problème de Cauchy (1) et J est de la forme $J = [0, T[$.

On a de plus *l'alternative d'explosion en temps fini* suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} T < +\infty \\ \lim_{t \rightarrow T} |y(t)| = +\infty. \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad T = +\infty \quad (2)$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas \mathcal{C}^1)

On suppose que f est continue par rapport à la première variable et \mathcal{C}^1 par rapport à la deuxième.

Alors il existe une unique solution maximale (J, y) du problème de Cauchy (1) et J est de la forme $J = [0, T[$.

On a de plus *l'alternative d'explosion en temps fini* suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} T < +\infty \\ \lim_{t \rightarrow T} |y(t)| = +\infty. \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad T = +\infty \quad (2)$$

Remarque 1 : T est appelé *temps d'existence* de la solution maximale.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas \mathcal{C}^1)

On suppose que f est continue par rapport à la première variable et \mathcal{C}^1 par rapport à la deuxième.

Alors il existe une unique solution maximale (J, y) du problème de Cauchy (1) et J est de la forme $J = [0, T[$.

On a de plus *l'alternative d'explosion en temps fini* suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} T < +\infty \\ \lim_{t \rightarrow T} |y(t)| = +\infty. \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad T = +\infty \quad (2)$$

Remarque 1 : T est appelé *temps d'existence* de la solution maximale.

Remarque 2 : Si $T = +\infty$, on dit que la solution maximale est *globale en temps*. Dans ce cas, la solution est nécessairement *bornée*.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas \mathcal{C}^1)

On suppose que f est continue par rapport à la première variable et \mathcal{C}^1 par rapport à la deuxième.

Alors il existe une unique solution maximale (J, y) du problème de Cauchy (1) et J est de la forme $J = [0, T[$.

On a de plus *l'alternative d'explosion en temps fini* suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} T < +\infty \\ \lim_{t \rightarrow T} |y(t)| = +\infty. \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad T = +\infty \quad (3)$$

Résultats principaux

Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas \mathcal{C}^1)

On suppose que f est continue par rapport à la première variable et \mathcal{C}^1 par rapport à la deuxième.

Alors il existe une unique solution maximale (J, y) du problème de Cauchy (1) et J est de la forme $J = [0, T[$.

On a de plus *l'alternative d'explosion en temps fini* suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} T < +\infty \\ \lim_{t \rightarrow T} |y(t)| = +\infty. \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad T = +\infty \quad (3)$$

Remarque 3 : Deux solutions distinctes du problème de Cauchy (i.e pour deux données initiales différentes) ne peuvent **jamais prendre les mêmes valeurs**.

Autrement dit : si y, z solutions de (1) sur un intervalle J telles que $y_0 \neq z_0$ alors

$$\forall t \in J, y(t) \neq z(t).$$

- 1 Équations différentielles ordinaires, rappels, exemples
 - C'est quoi une EDO ? Exemples...
 - Vocabulaire / Définitions / Résultats principaux
 - Comportements possibles d'équations différentielles autonomes
- 2 Dynamique des populations
 - Modélisation de la dynamique d'une population
 - Populations en interaction
 - Épidémies
- 3 Simulations Numériques
 - Construction des méthodes numériques
 - Convergence des Méthodes numériques
 - Simulations numériques pour le système de Volterra Lotka

Cas autonome : $y'(t) = f(y(t))$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Comportements possibles :

- Solution constante, $y(t) = y^*$. Nécessairement, y^* vérifie $f(y^*) = 0$. Cela nécessite bien sûr $y_0 = y^*$.

Cas autonome : $y'(t) = f(y(t))$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Comportements possibles :

- Solution constante, $y(t) = y^*$. Nécessairement, y^* vérifie $f(y^*) = 0$. Cela nécessite bien sûr $y_0 = y^*$.
- Existence globale et convergence vers un équilibre "stable" y^* :

$$f(y^*) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} y^*.$$

Cas autonome : $y'(t) = f(y(t))$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Comportements possibles :

- Solution constante, $y(t) = y^*$. Nécessairement, y^* vérifie $f(y^*) = 0$. Cela nécessite bien sûr $y_0 = y^*$.
- Existence globale et convergence vers un équilibre "stable" y^* :

$$f(y^*) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} y^*.$$

- Explosion en temps fini : réaction "autocatalysée"

Cas autonome : $y'(t) = f(y(t))$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Comportements possibles :

- Solution constante, $y(t) = y^*$. Nécessairement, y^* vérifie $f(y^*) = 0$. Cela nécessite bien sûr $y_0 = y^*$.
- Existence globale et convergence vers un équilibre "stable" y^* :

$$f(y^*) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} y^*.$$

- Explosion en temps fini : réaction "autocatalysée"
Exemple : $y'(t) = y(t)^2$, Solution en : $\frac{1}{T_0 - t}$.

Cas autonome : $y'(t) = f(y(t))$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Comportements possibles :

- Solution constante, $y(t) = y^*$. Nécessairement, y^* vérifie $f(y^*) = 0$. Cela nécessite bien sûr $y_0 = y^*$.
- Existence globale et convergence vers un équilibre "stable" y^* :

$$f(y^*) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} y^*.$$

- Explosion en temps fini : réaction "autocatalysée"
Exemple : $y'(t) = y(t)^2$, Solution en : $\frac{1}{T_0 - t}$.

NB : Pas de solution périodique non constante pour une EDO scalaire !

Cas système 2 EDOs autonomes :

Cadre : système autonome de 2 EDOs scalaires. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Cas système 2 EDOs autonomes :

Cadre : système autonome de 2 EDOs scalaires. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Comportements possibles :

- Explosion en temps fini

Cas système 2 EDOs autonomes :

Cadre : système autonome de 2 EDOs scalaires. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Comportements possibles :

- Explosion en temps fini
- Solution constante

$$x(t) = x^*, y(t) = y^* \quad \text{où} \quad f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0.$$

Cas système 2 EDOs autonomes :

Cadre : système autonome de 2 EDOs scalaires. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Comportements possibles :

- Explosion en temps fini
- Solution constante
 $x(t) = x^*, y(t) = y^*$ où $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$.
- Solutions globales et convergence vers un équilibre (x^*, y^*) stable :
 $(x(t), y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x^*, y^*)$, avec $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$

Cas système 2 EDOs autonomes :

Cadre : système autonome de 2 EDOs scalaires. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Comportements possibles :

- Explosion en temps fini
- Solution constante
 $x(t) = x^*, y(t) = y^*$ où $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$.
- Solutions globales et convergence vers un équilibre (x^*, y^*) stable :
 $(x(t), y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x^*, y^*)$, avec $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$
- Convergence vers une solution périodique.

Exemple de convergence vers une solution périodique

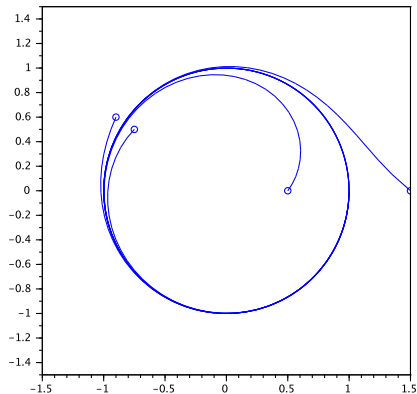
Exemple de convergence vers une solution périodique stable :

$$\begin{cases} x' = (1 - x^2 - y^2)x - y \\ y' = (1 - x^2 - y^2)y + x. \end{cases} \quad \text{sol périodique : } x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$

Exemple de convergence vers une solution périodique

Exemple de convergence vers une solution périodique stable :

$$\begin{cases} x' = (1 - x^2 - y^2)x - y \\ y' = (1 - x^2 - y^2)y + x. \end{cases} \quad \text{sol périodique : } x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$



Système de 2 EDOs linéaires

Le cas de deux EDOs linéaires à coeff constants :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases} \quad \text{où : } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Système de 2 EDOs linéaires

Le cas de deux EDOs linéaires à coeff constants :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases} \quad \text{où : } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Solution explicite : $x(t), y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$

où λ_1 et λ_2 sont appelées *valeurs propres* de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ce sont des réels tels que $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Système de 2 EDOs linéaires

Le cas de deux EDOs linéaires à coeff constants :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases} \quad \text{où : } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Solution explicite : $x(t), y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$

où λ_1 et λ_2 sont appelées *valeurs propres* de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ce sont des réels tels que $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Comportement : Dépend des signes des parties réelles de λ_1 et λ_2 .

Système de 2 EDOs linéaires

Le cas de deux EDOs linéaires à coeff constants :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases} \quad \text{où : } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Solution explicite : $x(t), y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$

où λ_1 et λ_2 sont appelées *valeurs propres* de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ce sont des réels tels que $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Comportement : Dépend des signes des parties réelles de λ_1 et λ_2 .

- Si $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ pour $i = 1$ ou $i = 2$, **explosion**

Système de 2 EDOs linéaires

Le cas de deux EDOs linéaires à coeff constants :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases} \quad \text{où : } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Solution explicite : $x(t), y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$

où λ_1 et λ_2 sont appelées *valeurs propres* de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ce sont des réels tels que $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Comportement : Dépend des signes des parties réelles de λ_1 et λ_2 .

- Si $\mathcal{R}e(\lambda_i) > 0$ pour $i = 1$ ou $i = 2$, **explosion**
- Si $\mathcal{R}e(\lambda_i) < 0$ pour $i = 1$ ET $i = 2$, **convergence vers** $(0, 0)$

Système de 2 EDOs linéaires

Le cas de deux EDOs linéaires à coeff constants :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases} \quad \text{où : } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Solution explicite : $x(t), y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$

où λ_1 et λ_2 sont appelées *valeurs propres* de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ce sont des réels tels que $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Comportement : Dépend des signes des parties réelles de λ_1 et λ_2 .

- Si $\mathcal{R}e(\lambda_i) > 0$ pour $i = 1$ ou $i = 2$, **explosion**
- Si $\mathcal{R}e(\lambda_i) < 0$ pour $i = 1$ ET $i = 2$, **convergence vers** $(0, 0)$
- Si $\mathcal{R}e(\lambda_i) = 0$ pour $i = 1$ ET $i = 2$ plusieurs possibilités dont la convergence vers une solution périodique

Système de 2 EDOs linéaires

Le cas de deux EDOs linéaires à coeff constants :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases} \quad \text{où : } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Solution explicite : $x(t), y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$

où λ_1 et λ_2 sont appelées *valeurs propres* de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ce sont des réels tels que $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Comportement : Dépend des signes des parties réelles de λ_1 et λ_2 .

- Si $\mathcal{R}e(\lambda_i) > 0$ pour $i = 1$ ou $i = 2$, **explosion**
- Si $\mathcal{R}e(\lambda_i) < 0$ pour $i = 1$ ET $i = 2$, **convergence vers** $(0, 0)$
- Si $\mathcal{R}e(\lambda_i) = 0$ pour $i = 1$ ET $i = 2$ plusieurs possibilités dont la convergence vers une solution périodique
- $(0, 0)$ **solution constante**.

Cas système 3 EDOs autonomes :

Exemple de chaos : le système de Lorentz

Cas système 3 EDOs autonomes :

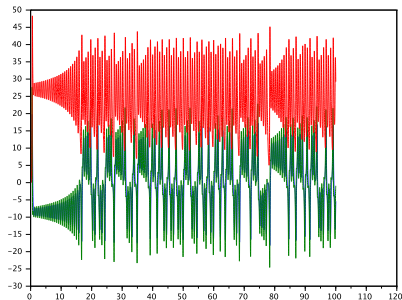
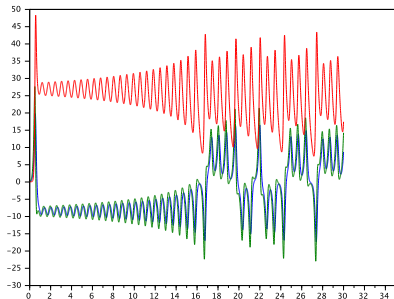
Exemple de chaos : le système de Lorenz

$$\begin{cases} x'(t) = s(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t). \end{cases} \quad \text{où : } s = 10, r = 28, b = 8/3.$$

Cas système 3 EDOs autonomes :

Exemple de chaos : le système de Lorentz

$$\begin{cases} x'(t) = s(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t). \end{cases} \quad \text{où : } s = 10, r = 28, b = 8/3.$$



Cas système 4 EDOs autonome :

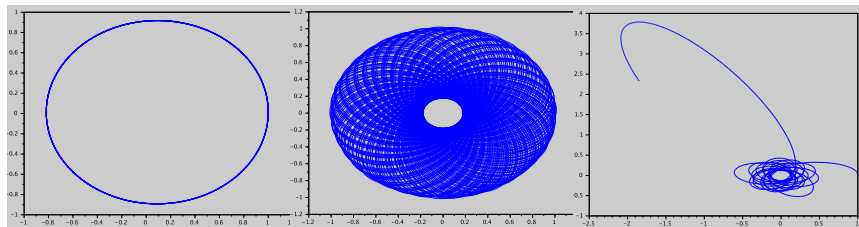
Exemple de chaos : le problème à 2 corps, $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{q}''(t) = -\frac{\mu \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \Leftrightarrow \begin{cases} q_i'(t) = p_i(t), & i = 1, 2 \\ p_i'(t) = \frac{-\mu q_i(t)}{(q_1(t)^2 + q_2(t)^2 + q_3(t)^2)^{3/2}} & i = 1, 2 \end{cases}$$

Cas système 4 EDOs autonome :

Exemple de chaos : le problème à 2 corps, $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{q}''(t) = -\frac{\mu \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \Leftrightarrow \begin{cases} q_i'(t) = p_i(t), & i = 1, 2 \\ p_i'(t) = \frac{-\mu q_i(t)}{(q_1(t)^2 + q_2(t)^2 + q_3(t)^2)^{3/2}} & i = 1, 2 \end{cases}$$



"Prédire" le comportement d'une solution d'un système de 2 EDOs ?

Prédire le comportement qualitatif des solutions : Pour cela, on utilise une représentation *dans le plan de phase*.

Considérons le système d'EDO suivant de données initiales (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)), \\ y'(t) = g(x(t), y(t)), \end{cases}$$

"Prédire" le comportement d'une solution d'un système de 2 EDOs ?

Prédire le comportement qualitatif des solutions : Pour cela, on utilise une représentation *dans le plan de phase*.

Considérons le système d'EDO's suivant de données initiales (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)), \\ y'(t) = g(x(t), y(t)), \end{cases}$$

On trace les solutions dans le plan de phase en traçant la courbe paramétrée définie par $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$.

"Prédire" le comportement d'une solution d'un système de 2 EDOs ?

Prédire le comportement qualitatif des solutions : Pour cela, on utilise une représentation *dans le plan de phase*.

Considérons le système d'EDO's suivant de données initiales (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)), \\ y'(t) = g(x(t), y(t)), \end{cases}$$

On trace les solutions dans le plan de phase en traçant la courbe paramétrée définie par $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$.

En traçant en chaque point (x, y) le vecteur de coordonnées $(f(x, y) \quad g(x, y))$, on connaît en chaque point la tangente à la trajectoire et on peut donc tracer "à la main" les solutions et "voir" leur allure.

- 1 Équations différentielles ordinaires, rappels, exemples
 - C'est quoi une EDO ? Exemples...
 - Vocabulaire / Définitions / Résultats principaux
 - Comportements possibles d'équations différentielles autonomes
- 2 Dynamique des populations
 - Modélisation de la dynamique d'une population
 - Populations en interaction
 - Épidémies
- 3 Simulations Numériques
 - Construction des méthodes numériques
 - Convergence des Méthodes numériques
 - Simulations numériques pour le système de Volterra Lotka

Ce que l'on veut modéliser : $y(t)$: nombre d'individus au temps t .

Dynamique des populations

Ce que l'on veut modéliser : $y(t)$: nombre d'individus au temps t .

Pour obtenir une fonction "dérivable" : on adimensionne par une population de référence y_0 "grande".

Dynamique des populations

Ce que l'on veut modéliser : $y(t)$: nombre d'individus au temps t .

Pour obtenir une fonction "dérivable" : on adimensionne par une population de référence y_0 "grande".

Evolution de y : $y'(t) = \text{Naissance} - \text{Décès}$

Ce que l'on veut modéliser : $y(t)$: nombre d'individus au temps t .

Pour obtenir une fonction "dérivable" : on adimensionne par une population de référence y_0 "grande".

Evolution de y : $y'(t) = \text{Naissance} - \text{Décès}$

Processus de modélisation :

- Hypothèses sur la reproduction / mortalité

Ce que l'on veut modéliser : $y(t)$: nombre d'individus au temps t .

Pour obtenir une fonction "dérivable" : on adimensionne par une population de référence y_0 "grande".

Evolution de y : $y'(t) = \text{Naissance} - \text{Décès}$

Processus de modélisation :

- Hypothèses sur la reproduction / mortalité
- Mise en équation
- Analyse mathématique du problème, propriétés et retour au modèle

Ce que l'on veut modéliser : $y(t)$: nombre d'individus au temps t .

Pour obtenir une fonction "dérivable" : on adimensionne par une population de référence y_0 "grande".

Evolution de y : $y'(t) = \text{Naissance} - \text{Décès}$

Processus de modélisation :

- Hypothèses sur la reproduction / mortalité
- Mise en équation
- Analyse mathématique du problème, propriétés et retour au modèle
- Simulations numériques

Ce que l'on veut modéliser : $y(t)$: nombre d'individus au temps t .

Pour obtenir une fonction "dérivable" : on adimensionne par une population de référence y_0 "grande".

Evolution de y : $y'(t) = \text{Naissance} - \text{Décès}$

Processus de modélisation :

- Hypothèses sur la reproduction / mortalité
- Mise en équation
- Analyse mathématique du problème, propriétés et retour au modèle
- Simulations numériques
- Discussion, pertinence/enrichissement du modèle ?

Un premier Modèle : Malthus (1798)

Hypothèses : Nombre de naissances et de décès *proportionnels à la population* (taux respectifs a et b)

Modèle de Malthus : $y'(t) = (a - b)y(t)$, $a, b > 0$

Propriétés

Un premier Modèle : Malthus (1798)

Hypothèses : Nombre de naissances et de décès *proportionnels à la population* (taux respectifs a et b)

Modèle de Malthus : $y'(t) = (a - b)y(t)$, $a, b > 0$

Propriétés

Résolution : $y(t) = y_0 e^{(a-b)t}$.

Un premier Modèle : Malthus (1798)

Hypothèses : Nombre de naissances et de décès *proportionnels à la population* (taux respectifs a et b)

Modèle de Malthus : $y'(t) = (a - b)y(t)$, $a, b > 0$

Propriétés

Résolution : $y(t) = y_0 e^{(a-b)t}$.

Comportement :

- si $a > b$ croissance exponentielle de la population
- si $a < b$, décroissance exponentielle de la population

Un premier Modèle : Malthus (1798)

Hypothèses : Nombre de naissances et de décès *proportionnels à la population* (taux respectifs a et b)

Modèle de Malthus : $y'(t) = (a - b)y(t)$, $a, b > 0$

Propriétés

Résolution : $y(t) = y_0 e^{(a-b)t}$.

Comportement :

- si $a > b$ croissance exponentielle de la population
- si $a < b$, décroissance exponentielle de la population

Discussion :

- Simple à mettre en oeuvre
- **Mais** Croissance exponentielle non réaliste : limitation dues au milieu ambiant

Un premier Modèle : Malthus (1798)

Hypothèses : Nombre de naissances et de décès *proportionnels à la population* (taux respectifs a et b)

Modèle de Malthus : $y'(t) = (a - b)y(t)$, $a, b > 0$

Propriétés

Résolution : $y(t) = y_0 e^{(a-b)t}$.

Comportement :

- si $a > b$ croissance exponentielle de la population
- si $a < b$, décroissance exponentielle de la population

Discussion :

- Simple à mettre en oeuvre
- **Mais** Croissance exponentielle non réaliste : limitation dues au milieu ambiant

⇒ Il faut faire dépendre a et b de $y(t)$ pour avoir un comportement plus réaliste : limitation de la croissance

Modèle de croissance *logistique* : Verhulst (1840)

Les nouvelles hypothèses : Le milieu ne peut nourrir que K individus.

- Si $y(t) < K$, la population augmente : natalité > mortalité
- Si $y(t) > K$, pas assez de ressources, la population diminue
- Si $y(t) \ll K$ cas de Malthus : croissance exponentielle.

Modèle de croissance *logistique* : Verhulst (1840)

Les nouvelles hypothèses : Le milieu ne peut nourrir que K individus.

- Si $y(t) < K$, la population augmente : natalité > mortalité
- Si $y(t) > K$, pas assez de ressources, la population diminue
- Si $y(t) \ll K$ cas de Malthus : croissance exponentielle.

Mise en équations : $y'(t) = F(y(t))$

où F vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) > 0 \text{ si } x < K, \\ F(x) < 0 \text{ si } x > K, \\ F(x) \sim cx \text{ si } x \ll K. \\ F(0) = 0 \text{ pas de création spontanée d'individus} \end{array} \right.$$

Choix de F : $F(x) = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $r > 0$.

Modèle de croissance *logistique* : Verhulst (1840)

Modèle de croissance logistique : $y'(t) = F(y(t)) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$.

Modèle de croissance *logistique* : Verhulst (1840)

Modèle de croissance logistique : $y'(t) = F(y(t)) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$.

Discussion :

- Parfois F est donnée par des mesures expérimentales
- Si on connaît des dynamiques de reproduction/mort, on peut parfois en déduire F mais il faut des hypothèses des biologistes.
- La fonction proposée est la plus simple qui vérifie les propriétés demandées.

Modèle de croissance *logistique* : Verhulst (1840)

Modèle de croissance logistique : $y'(t) = F(y(t)) = r y(t)(1 - \frac{y(t)}{K})$.

Discussion :

- Parfois F est donnée par des mesures expérimentales
- Si on connaît des dynamiques de reproduction/mort, on peut parfois en déduire F mais il faut des hypothèses des biologistes.
- La fonction proposée est la plus simple qui vérifie les propriétés demandées.

Signification des constantes :

- K : capacité d'accueil du milieu
- r : vitesse de croissance de la population quand $y(t) \ll K$.

Résolution du problème de croissance logistique, comportement...

On veut résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) y(t), \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

Étape 1 : on remarque que $y(t) = 0$ et $y(t) = K$ sont des solutions associées aux données initiales $y_0 = 0$ et $y_0 = K$ resp.

Conséquence : Si $y_0 \notin \{0, K\}$ alors $\forall t > 0, y(t) \notin \{0, K\}$!

Étape 2 : On peut diviser par $y(t)$!

$$\frac{y'(t)}{(K - y(t))y(t)} = \frac{\alpha}{K}.$$

Étape 3 : On écrit un développement en élément simple de la fraction :

$$\frac{1}{y(K - y)} = \frac{1}{K} \frac{1}{y} + \frac{1}{K} \frac{1}{(K - y)}$$

Modèle de croissance *logistique* : Verhulst (1840)

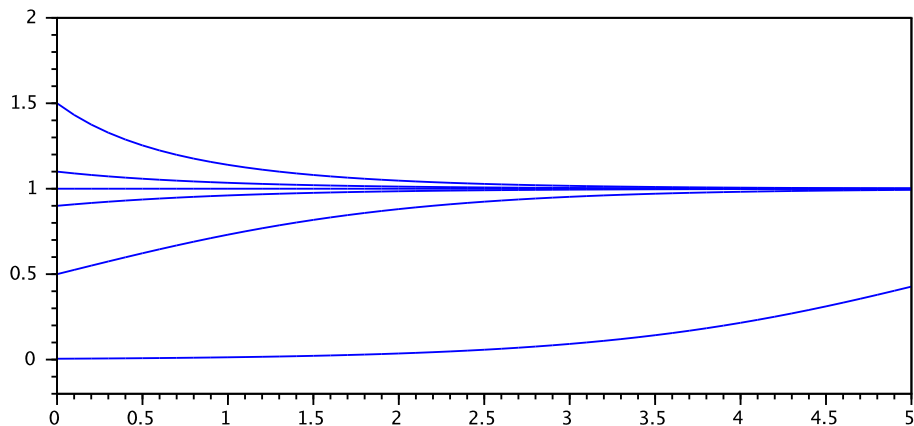


FIGURE: Evolution de la population, modèle logistique

Modèle de croissance logistique : Étude d'équilibres

Modèle de croissance logistique : $y'(t) = f(y(t)) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$.

Modèle de croissance logistique : Étude d'équilibres

Modèle de croissance logistique : $y'(t) = f(y(t)) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$.

Équilibres : y^* tels que $f(y^*) = 0$ (ici, $y^* \in \{0, K\}$).

Modèle de croissance logistique : Étude d'équilibres

Modèle de croissance logistique : $y'(t) = f(y(t)) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$.

Équilibres : y^* tels que $f(y^*) = 0$ (ici, $y^* \in \{0, K\}$).

Notion de stabilité : partant "proche de y^* ",

- ① Équilibre stable : après une petite perturbation, retour à l'équilibre y^*
- ② Équilibre instable : une petite perturbation déstabilise le système.

Modèle de croissance logistique : Étude d'équilibres

Modèle de croissance logistique : $y'(t) = f(y(t)) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$.

Équilibres : y^* tels que $f(y^*) = 0$ (ici, $y^* \in \{0, K\}$).

Notion de stabilité : partant "proche de y^* ",

- 1 Équilibre stable : après une petite perturbation, retour à l'équilibre y^*
- 2 Équilibre instable : une petite perturbation déstabilise le système.

Équation des petites perturbations : $y(t) = y^* + u(t)$ où

$$u' = y' = F(y(t)) = F(y^* + u(t)) = F'(y^*)u(t) + \mathcal{O}(u(t)^2) \sim F'(y^*)u(t).$$

Modèle de croissance logistique : Étude d'équilibres

Modèle de croissance logistique : $y'(t) = f(y(t)) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$.

Équilibres : y^* tels que $f(y^*) = 0$ (ici, $y^* \in \{0, K\}$).

Notion de stabilité : partant "proche de y^* ",

- 1 Équilibre stable : après une petite perturbation, retour à l'équilibre y^*
- 2 Équilibre instable : une petite perturbation déstabilise le système.

Équation des petites perturbations : $y(t) = y^* + u(t)$ où

$$u' = y' = F(y(t)) = F(y^* + u(t)) = F'(y^*)u(t) + \mathcal{O}(u(t)^2) \sim F'(y^*)u(t).$$

Discussion :

- Si $F'(y^*) > 0$ alors y^* est un équilibre *instable*
- Si $F'(y^*) < 0$ alors y^* est un équilibre *stable*

Modèle de croissance logistique : Étude d'équilibres

Modèle de croissance logistique : $y'(t) = f(y(t)) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$.

Équilibres : y^* tels que $f(y^*) = 0$ (ici, $y^* \in \{0, K\}$).

Notion de stabilité : partant "proche de y^* ",

- 1 Équilibre stable : après une petite perturbation, retour à l'équilibre y^*
- 2 Équilibre instable : une petite perturbation déstabilise le système.

Équation des petites perturbations : $y(t) = y^* + u(t)$ où

$$u' = y' = F(y(t)) = F(y^* + u(t)) = F'(y^*)u(t) + \mathcal{O}(u(t)^2) \sim F'(y^*)u(t).$$

Discussion :

- Si $F'(y^*) > 0$ alors y^* est un équilibre *instable*
- Si $F'(y^*) < 0$ alors y^* est un équilibre *stable*

Dans notre cas : Deux équilibres $y^* = 0$ et $y^* = K$

- $F'(0) > 0$ donc 0 est un équilibre *instable*
- $F'(K) < 0$ donc K est un équilibre *stable*.

Modèle de croissance *logistique* : Équilibres

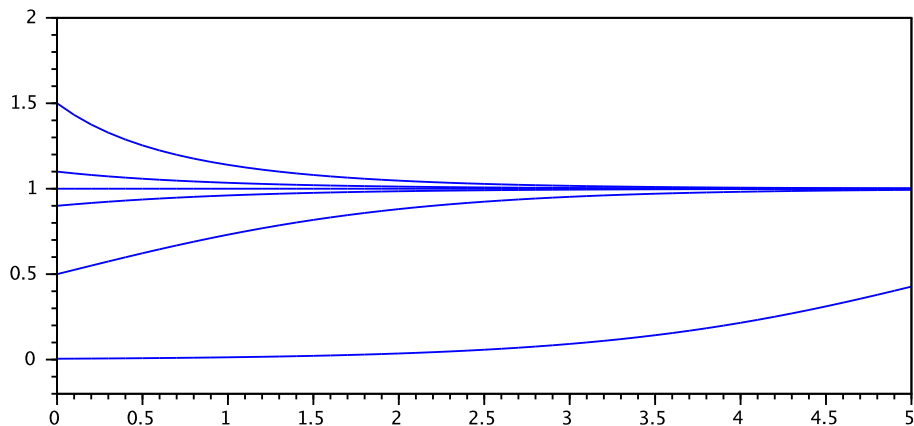


FIGURE: Evolution de la population, modèle logistique

Bernoulli et la petite vérole! (1760)

En 1760 Bernoulli s'intéresse à *l'impact de la petite vérole sur la mortalité* pour démontrer l'intérêt de l'inoculation.

Inoculation : inoculer volontairement la maladie (que l'on ne peut attraper que 2 fois) \neq vaccination

Mise en équation du problème :

- Grandeurs d'intérêt :

$N(t)$ nombre de survivants à l'instant t

$x(t)$ survivants qui n'ont pas encore eu la maladie à l'instant t

- taux d'infection chez les "sains" : a
- taux de mortalité permis les malades : b
- mortalité "naturelle" : $m(t)$

Équation :

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) - m(t)x(t), \\ N'(t) = -abx(t) - m(t)N(t), \end{cases}$$

1 Équations différentielles ordinaires, rappels, exemples

- C'est quoi une EDO ? Exemples...
- Vocabulaire / Définitions / Résultats principaux
- Comportements possibles d'équations différentielles autonomes

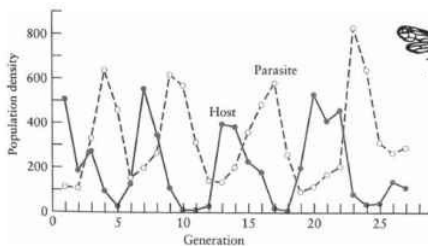
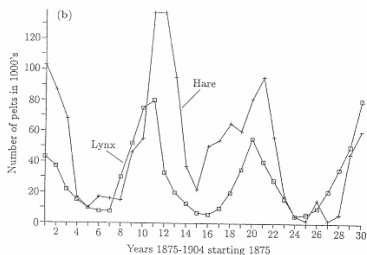
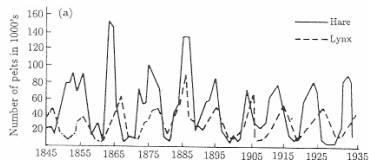
2 Dynamique des populations

- Modélisation de la dynamique d'une population
- **Populations en interaction**
- Épidémies

3 Simulations Numériques

- Construction des méthodes numériques
- Convergence des Méthodes numériques
- Simulations numériques pour le système de Volterra Lotka

Observations biologiques



Observations : Comportement quasi-périodique des populations
⇒ Modélisation par un système de 2 EDOs

Interaction Proie-Prédateur de Volterra-Lotka

Cadre : Deux populations Proies $N(t)$, Prédateurs $P(t)$.

Interaction Proie-Prédateur de Volterra-Lotka

Cadre : Deux populations Proies $N(t)$, Prédateurs $P(t)$.

Modèle de Volterra-Lotka : Hypothèses

- Naissances de proies proportionnelles à N
- Morts par prédateurs : proportionnelles à N et P
- Naissance de prédateurs : proportionnelles à P et à N
- Mort de prédateurs : proportionnelle à P (mort naturelle)

Interaction Proie-Prédateur de Volterra-Lotka

Cadre : Deux populations Proies $N(t)$, Prédateurs $P(t)$.

Modèle de Volterra-Lotka : Hypothèses

- Naissances de proies proportionnelles à N
- Morts par prédateurs : proportionnelles à N et P
- Naissance de prédateurs : proportionnelles à P et à N
- Mort de prédateurs : proportionnelle à P (mort naturelle)

Mise en équations :

$$\begin{cases} N'(t) = (a - bP)N, \\ P'(t) = (-c + dN)P. \end{cases}$$

Interaction Proie-Prédateur de Volterra-Lotka

Cadre : Deux populations Proies $N(t)$, Prédateurs $P(t)$.

Modèle de Volterra-Lotka : Hypothèses

- Naissances de proies proportionnelles à N
- Morts par prédateurs : proportionnelles à N et P
- Naissance de prédateurs : proportionnelles à P et à N
- Mort de prédateurs : proportionnelle à P (mort naturelle)

Mise en équations :

$$\begin{cases} N'(t) = (a - bP)N, \\ P'(t) = (-c + dN)P. \end{cases}$$

Remarque : Pas de limitation des naissances de proies

Interaction Proie-Prédateur de Volterra-Lotka

Cadre : Deux populations Proies $N(t)$, Prédateurs $P(t)$.

Modèle de Volterra-Lotka : Hypothèses

- Naissances de proies proportionnelles à N
- Morts par prédateurs : proportionnelles à N et P
- Naissance de prédateurs : proportionnelles à P et à N
- Mort de prédateurs : proportionnelle à P (mort naturelle)

Mise en équations :

$$\begin{cases} N'(t) = (a - bP)N, \\ P'(t) = (-c + dN)P. \end{cases}$$

Remarque : Pas de limitation des naissances de proies

Une quantité conservée : $H(P, N) = bP - a \log P + d \log N - cN$

Une amélioration avec le modèle de croissance logistique

Cadre : Deux populations Proies $N(t)$, Prédateurs $P(t)$.

Une amélioration avec le modèle de croissance logistique

Cadre : Deux populations Proies $N(t)$, Prédateurs $P(t)$.

Modèle de Volterra-Lotka amélioré : Hypothèses

- Modèle logistique pour la croissance des proies
- Morts par prédateurs : proportionnelles à N et P
- Naissance de prédateurs : proportionnelles à P et à N
- Mort de prédateurs : proportionnelle à P (mort naturelle)

Une amélioration avec le modèle de croissance logistique

Cadre : Deux populations Proies $N(t)$, Prédateurs $P(t)$.

Modèle de Volterra-Lotka amélioré : Hypothèses

- Modèle logistique pour la croissance des proies
- Morts par prédateurs : proportionnelles à N et P
- Naissance de prédateurs : proportionnelles à P et à N
- Mort de prédateurs : proportionnelle à P (mort naturelle)

Mise en équations :

$$\begin{cases} N'(t) = N \left(a - \frac{aN}{K} - bP \right), \\ P'(t) = (-c + dN) P. \end{cases}$$

Une amélioration avec le modèle de croissance logistique

Cadre : Deux populations Proies $N(t)$, Prédateurs $P(t)$.

Modèle de Volterra-Lotka amélioré : Hypothèses

- Modèle logistique pour la croissance des proies
- Morts par prédateurs : proportionnelles à N et P
- Naissance de prédateurs : proportionnelles à P et à N
- Mort de prédateurs : proportionnelle à P (mort naturelle)

Mise en équations :

$$\begin{cases} N'(t) = N \left(a - \frac{aN}{K} - bP \right), \\ P'(t) = (-c + dN) P. \end{cases}$$

Remarque : Plus de conservation !

Autres types d'interaction : compétition, symbiose..

Compétition : Les espèces se gênent, les ressources sont partagées par les deux espèces.

Autres types d'interaction : compétition, symbiose..

Compétition : Les espèces se gênent, les ressources sont partagées par les deux espèces.

Symbiose : Les populations se facilitent la vie mutuellement, les ressources sont partagées par les deux espèces.

Autres types d'interaction : compétition, symbiose..

Compétition : Les espèces se gênent, les ressources sont partagées par les deux espèces.

Symbiose : Les populations se facilitent la vie mutuellement, les ressources sont partagées par les deux espèces.

Évolutions de populations structurées avec sélection

Modèle d'épidémie SIR (Kermack, McKendrick, 1927)

Cadre : Modélisation d'une épidémie d'une maladie contagieuse

Modèle d'épidémie SIR (Kermack, McKendrick, 1927)

Cadre : Modélisation d'une épidémie d'une maladie contagieuse

Trois populations :

- $S(t)$: individus sains (Suceptibles)
- $I(t)$: individus malades (Infectés)
- $R(t)$: individus morts, ou guéris et immunisés (Rémis)

Modèle d'épidémie SIR (Kermack, McKendrick, 1927)

Cadre : Modélisation d'une épidémie d'une maladie contagieuse

Trois populations :

- $S(t)$: individus sains (Suceptibles)
- $I(t)$: individus malades (Infectés)
- $R(t)$: individus morts, ou guéris et immunisés (Rémis)

Hypothèses de modélisation :

- Contamination proportionnelle au nombre de rencontres entre individus sains et malades
- Les malades ont une certaine probabilité de guérir par unité de temps

Modèle d'épidémie SIR (Kermack, McKendrick, 1927)

Cadre : Modélisation d'une épidémie d'une maladie contagieuse

Trois populations :

- $S(t)$: individus sains (Suceptibles)
- $I(t)$: individus malades (Infectés)
- $R(t)$: individus morts, ou guéris et immunisés (Rémis)

Hypothèses de modélisation :

- Contamination proportionnelle au nombre de rencontres entre individus sains et malades
- Les malades ont une certaine probabilité de guérir par unité de temps

Mise en équation

$$\begin{cases} S'(t) = -rSI, \\ I'(t) = rSI - aI, \\ R'(t) = aI. \end{cases} \quad r, a > 0$$

Modèle d'épidémie SIR (Kermack, McKendrick, 1927)

Cadre : Modélisation d'une épidémie d'une maladie contagieuse

Trois populations :

- $S(t)$: individus sains (Suceptibles)
- $I(t)$: individus malades (Infectés)
- $R(t)$: individus morts, ou guéris et immunisés (Rémis)

Hypothèses de modélisation :

- Contamination proportionnelle au nombre de rencontres entre individus sains et malades
- Les malades ont une certaine probabilité de guérir par unité de temps

Mise en équation

$$\begin{cases} S'(t) = -rSI, \\ I'(t) = rSI - aI, \\ R'(t) = aI. \end{cases} \quad r, a > 0$$

Résultat : Si $\mathcal{R}_0 = \frac{rS_0}{a} \leq 1$ alors $I(t) \rightarrow 0$. (pas d'épidémie)

Modèle d'épidémie SIR

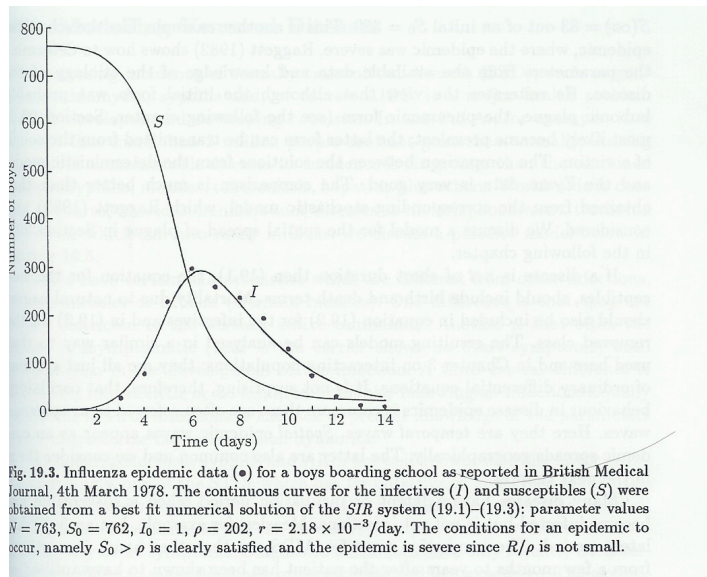
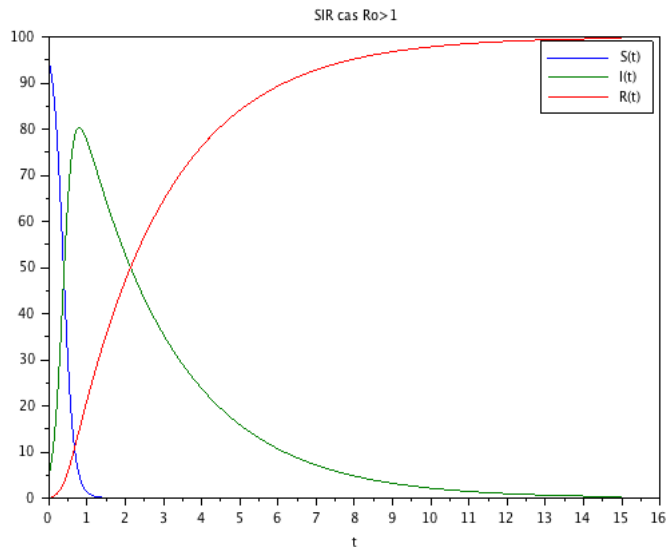
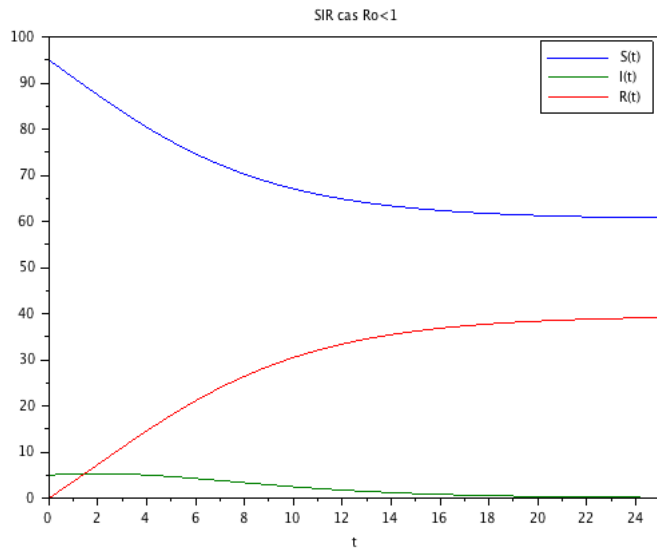


Fig. 19.3. Influenza epidemic data (•) for a boys boarding school as reported in British Medical Journal, 4th March 1978. The continuous curves for the infectives (I) and susceptibles (S) were obtained from a best fit numerical solution of the SIR system (19.1)–(19.3): parameter values $N = 763$, $S_0 = 762$, $I_0 = 1$, $\rho = 202$, $r = 2.18 \times 10^{-3}$ /day. The conditions for an epidemic to occur, namely $S_0 > \rho$ is clearly satisfied and the epidemic is severe since R/ρ is not small.

Modèle d'épidémie SIR



Modèle d'épidémie SIR



Modélisation de la vaccination

- $S(t)$: individus sains (Suceptibles)
- $I(t)$: individus malades (Infectés)
- $R(t)$: individus morts, ou guéris et immunisés (Rémis)

Modélisation de la vaccination

- $S(t)$: individus sains (Suceptibles)
- $I(t)$: individus malades (Infectés)
- $R(t)$: individus morts, ou guéris et immunisés (Rémis)

Hypothèses de modélisation/vaccin :

- naissances et morts (naturelles) de taux d
- vaccination d'une fraction p des naissances.

Modélisation de la vaccination

- $S(t)$: individus sains (Suceptibles)
- $I(t)$: individus malades (Infectés)
- $R(t)$: individus morts, ou guéris et immunisés (Rémis)

Hypothèses de modélisation/vaccin :

- naissances et morts (naturelles) de taux d
- vaccination d'une fraction p des naissances.

Mise en équation

$$\begin{cases} S'(t) = d((1-p)N - S) - rSI, \\ I'(t) = rSI - (d+a)I, \\ R'(t) = dpN + aI - dR. \end{cases} \quad r, a > 0$$

Modélisation de la vaccination

- $S(t)$: individus sains (Susceptibles)
- $I(t)$: individus malades (Infectés)
- $R(t)$: individus morts, ou guéris et immunisés (Rémis)

Hypothèses de modélisation/vaccin :

- naissances et morts (naturelles) de taux d
- vaccination d'une fraction p des naissances.

Mise en équation

$$\begin{cases} S'(t) = d((1-p)N - S) - rSI, \\ I'(t) = rSI - (d+a)I, \\ R'(t) = dpN + aI - dR. \end{cases} \quad r, a > 0$$

Impact de la vaccination : $\mathcal{R}_0^{vaccination} = (1-p)\mathcal{R}_0$.

1 Équations différentielles ordinaires, rappels, exemples

- C'est quoi une EDO ? Exemples...
- Vocabulaire / Définitions / Résultats principaux
- Comportements possibles d'équations différentielles autonomes

2 Dynamique des populations

- Modélisation de la dynamique d'une population
- Populations en interaction
- Épidémies

3 Simulations Numériques

- Construction des méthodes numériques
- Convergence des Méthodes numériques
- Simulations numériques pour le système de Volterra Lotka

Équation à approcher : $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0$.

Équation à approcher : $y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0.$

Principe d'approximation :

- Calcul approché sur $[0, T]$ de $y(t)$ aux points $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ d'une subdivision uniforme de pas h :

$$t_0 = 0, \quad t_n = nh, \quad t_N = T.$$

- On note y_n une valeur approchée de u au temps t_n .
- L'erreur est d'autant plus petite que h est petit
- Pour calculer y_0, \dots, y_N il faut $N \sim T/h$ calculs

\implies Plus h est petit, plus le calcul est précis mais plus il est long !

Construction d'une méthode numérique

Principe d'approximation : intégrons l'EDO entre t_n et t_{n+1}

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds$$

Construction d'une méthode numérique

Principe d'approximation : intégrons l'EDO entre t_n et t_{n+1}

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds$$

⇒ Nécessité d'une méthode d'approximation d'intégrale

Construction d'une méthode numérique

Principe d'approximation : intégrons l'EDO entre t_n et t_{n+1}

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds$$

⇒ Nécessité d'une méthode d'approximation d'intégrale

Exemples de méthodes numériques :

- Méthode des rectangles à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \simeq hf(y(t_n))$$

Construction d'une méthode numérique

Principe d'approximation : intégrons l'EDO entre t_n et t_{n+1}

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds$$

⇒ Nécessité d'une méthode d'approximation d'intégrale

Exemples de méthodes numériques :

- Méthode des rectangles à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \simeq hf(y(t_n))$$

⇒ Méthode d'Euler explicite $y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$.

Construction d'une méthode numérique

Principe d'approximation : intégrons l'EDO entre t_n et t_{n+1}

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds$$

⇒ Nécessité d'une méthode d'approximation d'intégrale

Exemples de méthodes numériques :

- Méthode des rectangles à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \simeq hf(y(t_n))$$

⇒ Méthode d'Euler explicite $y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$.

- Méthode des rectangles à droite :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \simeq hf(y(t_{n+1}))$$

Construction d'une méthode numérique

Principe d'approximation : intégrons l'EDO entre t_n et t_{n+1}

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds$$

⇒ Nécessité d'une méthode d'approximation d'intégrale

Exemples de méthodes numériques :

- Méthode des rectangles à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \simeq hf(y(t_n))$$

⇒ Méthode d'Euler explicite $y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$.

- Méthode des rectangles à droite :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \simeq hf(y(t_{n+1}))$$

⇒ Méthode d'Euler implicite $y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1})$.

- Méthode des trapèzes :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \simeq \frac{h}{2} (f(y(t_n)) + f(y(t_{n+1})))$$

- Méthode des trapèzes :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \simeq \frac{h}{2} (f(y(t_n)) + f(y(t_{n+1})))$$

⇒ Méthode de Heun

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(y_n) + f(y_{n+1})).$$

- Méthode des trapèzes :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds \simeq \frac{h}{2} (f(y(t_n)) + f(y(t_{n+1})))$$

⇒ Méthode de Heun

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(y_n) + f(y_{n+1})).$$

Problème : méthode *implicite*

⇒ On approche $f(y_{n+1})$ par $f(y_n + hf(y_n))$.

Méthode de Heun : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(y_n) + f(y_n + hf(y_n)))$

Théorème de convergence

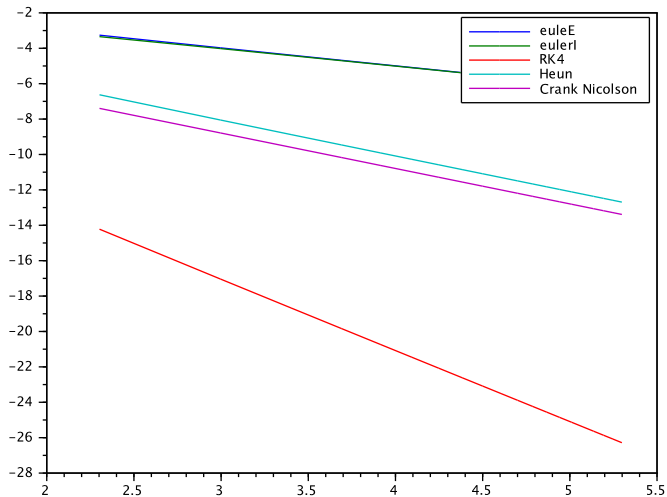
On dit qu'une méthode d'approximation d'EDO qui construit une approximation $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ de la solution exacte y est *convergente d'ordre p* si p est le plus grand entier tel que

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| \leq Ch^p.$$

Les méthodes d'Euler explicite et implicite sont convergentes d'ordre 1, la méthode de Heun est convergente d'ordre 2 et on peut fabriquer une méthode convergente d'ordre 4 appelée Runge-Kutta d'ordre 4.

Diagrammes de convergence

erreurs en coord logarithmiques



pente =

- 1.0106475 - 0.9898643 - 4.02079 - 2.0188962 - 2.0002278

1 Équations différentielles ordinaires, rappels, exemples

- C'est quoi une EDO ? Exemples...
- Vocabulaire / Définitions / Résultats principaux
- Comportements possibles d'équations différentielles autonomes

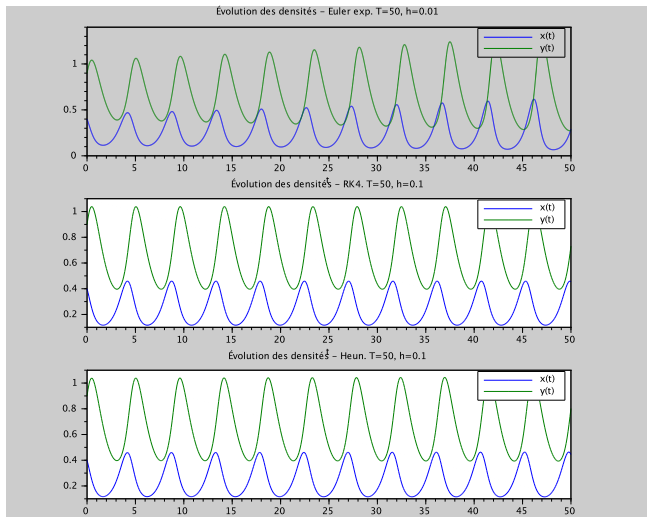
2 Dynamique des populations

- Modélisation de la dynamique d'une population
- Populations en interaction
- Épidémies

3 Simulations Numériques

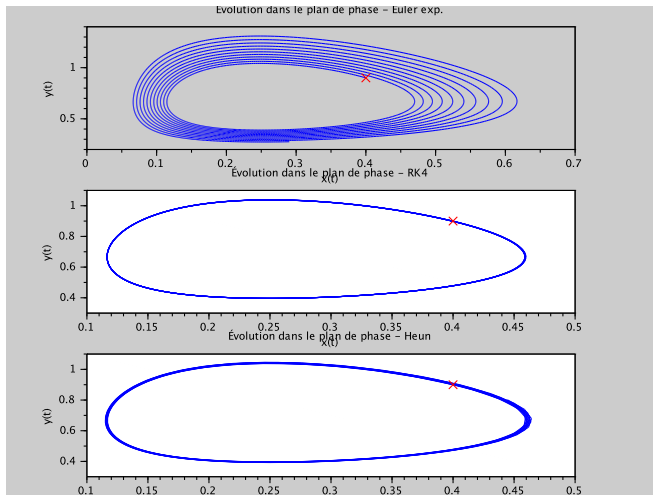
- Construction des méthodes numériques
- Convergence des Méthodes numériques
- Simulations numériques pour le système de Volterra Lotka

Evolution des populations



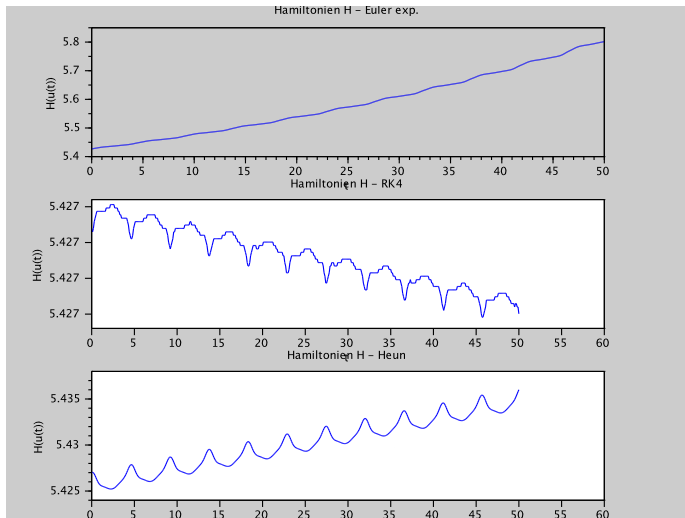
⇒ En apparence pas de différence notable entre les méthodes

Dans le plan de phase



⇒ On voit que les méthodes ne se comportent pas de la même façon.

Conservation de la fonction H



⇒ Importance du choix de la méthode numérique.

:-) Merci de votre attention :-)