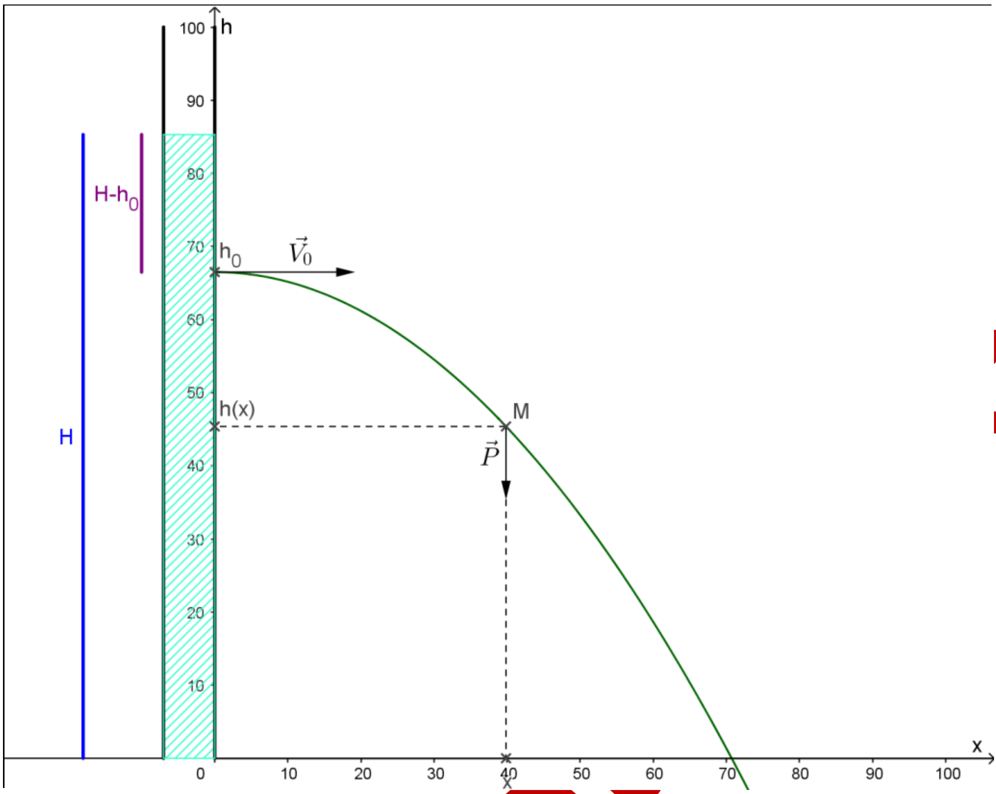
Annexe : Démonstration du résultat théorique (pour l'enseignant)



Colonne d'eau ayant une hauteur d'eau H, percée d'un trou à une hauteur h_0.
On étudie la trajectoire d'une goutte d'eau de masse m dans le plan $x0h$.

Bilan des forces : on néglige les frottements (air, vent...), la goutte est soumise uniquement à son poids $\vec{P}$.

Relation fondamentale de la dynamique : $\vec{P} = m\,\vec{\gamma}$ **(1)**.
Projection de la relation (1) :

- sur (Ox) $0 = m\,\gamma_x$ donc $\gamma_x = 0$
- sur (Oh) $-P = m\,\gamma_h$

$\gamma_x = 0$ donc $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ et $\dfrac{dx}{dt} = a$ (où a est une constante), on en déduit que $x(t) = a\,t + b$

Or pour $t = 0$, $x = 0$ et donc $b = 0$

pour $t = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = v_0$ (vitesse initiale horizontale) donc $a = v_0$.

Finalement $x(t) = v_0\,t$ **(2)**

$-P = m\,\gamma_h$ d'où $-m\,g = m\,\gamma_h$ soit $-g = \gamma_h$ donc $\dfrac{d^2h}{dt^2} = -g$ et $\dfrac{dh}{dt} = -g\,t + a'$ on en déduit que $h(t) = -g\,\dfrac{t^2}{2} + a'\,t + b'$

Or pour $t = 0$ $h = h_0$ et donc $b' = h_0$ avec h_0 la hauteur du trou par rapport au plan de base (le fond de la colonne)

pour $t = 0$, $\dfrac{dh}{dt} = 0$ (vitesse initiale horizontale) donc $a' = 0$

Finalement $h(t) = -g\,\dfrac{t^2}{2} + h_0$ **(3)**

(2)donne $t = \dfrac{x(t)}{v_0}$ et **(3)** donne $h(t) = -\,g\,\dfrac{x(t)^2}{v_0^{\,2}} + h_0$

Après élimination du temps, on obtient $h(x) = -\dfrac{1}{2}\,g\,\dfrac{x^2}{v_0^{\,2}} + h_0$

La formule de Torricelli donne $v_0 = \sqrt{2g(H - h_0)}$ soit $v_0^{\,2} = 2g(H - h_0)$.

On en déduit que la trajectoire de la goutte est incluse dans la parabole d'équation $h(x) = -\dfrac{1}{4(H - h_0)}x^2 + h_0$.

Pour répondre au problème initial : Déterminons la distance à la colonne du point d'impact du jet avec le plan de base, c'est l'abscisse positive du point de la parabole ayant une ordonnée nulle.

Si $h = 0$, $\dfrac{1}{4(H - h_0)}x^2 = h_0$ et donc $x^2 = 4(H - h_0) \times h_0$, puis $x^2 = 4(Hh_0 - h_0^{\,2})$ et donc $x = 2\sqrt{Hh_0 - h_0^{\,2}}$.

On en conclut que la distance à la colonne du point d'impact du jet avec le plan de base est $2\sqrt{Hh_0 - h_0^{\,2}}$.
Déterminons pour quelle valeur de h_0 cette distance est maximale.

Pour cela, étudions les variations de la fonction $u \longmapsto 2\sqrt{Hu - u^2}$, ce sont les mêmes que celles de la fonction polynôme du second degré $u \longmapsto Hu - u^2$.

Son tableau de variation est :

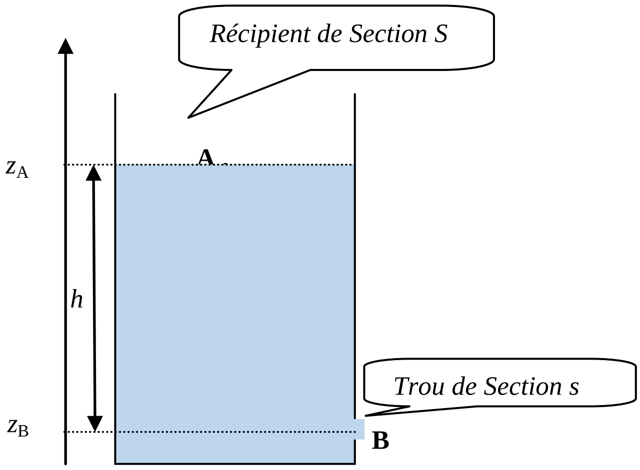
u	$\dfrac{H}{2}$
Variation de la fonction	$\nearrow$ $\dfrac{H^2}{4}$ $\searrow$

Ainsi la distance à la colonne du point d'impact du jet avec le plan de base est maximale quand $h_0 = \dfrac{H}{2}$ et alors elle vaut H.

Formule de Torricelli : v vitesse d'écoulement du liquide : $v^2 = 2gh$.

Conditions de l'expérience :

- On considère un fluide parfait.
- Un récipient de forme cylindrique de grande taille de section S.
- Le récipient est percé d'un trou de section s très petite devant la section S du recipient. ($s << S$)
- Le récipient est remplie d'un liquide de masse volumique ρ



Considérons deux points A et B à des altitudes respectives z_A et z_B tels que montrés sur la figure. On note P_A et P_B les pressions aux points A et B respectivement.

v_A et, v_B sont les vitesses respectives d'écoulement du fluide aux points A et B.

g étant l'accélération de pesanteur.

Conservation du débit :

Ecrivons la conservation du débit à travers les deux sections S et s : (débit en S) = (débit en s)

$v_A S = v_B s$ d'où $v_A = v_B \frac{s}{S}$ Comme $s << S$, v_A est négligeable devant v_B ; ($v_A \approx 0$)

Théorème de Bernouilli :

On applique le théorème de Bernoulli aux niveaux de A et B *(on considère que le champ de pesanteur est uniforme à l'échelle de la cuve)*

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

or $P_A = P_B = P_{atmosphérique}$, on obtient $\frac{1}{2} v_B^2 = g(z_A - z_B)$ d'où $v_B^2 = 2gh$ *ce qui donne* $v_B = \sqrt{2gh}$

Remarque : La vitesse v_B d'écoulement au niveau du trou ne dépend pas de la masse volumique du liquide. Elle ne dépend que de la hauteur h (g étant considéré constant).

****