Résolution de problèmes : énoncés de problèmes à plusieurs contraintes

Problèmes issus du projet de brochure sur la résolution de problèmes du groupe « école primaire »

Table des matières

Nous emploierons dans ce document le masculin pour « le professeur » à titre épicène. La numérotation des problèmes est celle de la future brochure.

1. Problème A1 : Faire 23[1] (cycle 2 et 3)

Énoncé M (contexte monnaie)

On veut faire 23 € avec des pièces de 2 € et des billets de 5 €. Quel est le nombre d'éléments de chaque sorte que l'on va prendre ?

Autre valeur pour la somme : 42 €.

Le contexte de la monnaie contraint le choix des nombres à additionner (il n'existe pas de pièces de 3 €). Pour adapter le problème aux élèves ou au niveau de classe on peut choisir un autre contexte, celui d'un jeu de fléchettes sur une cible par exemple.

Énoncé C (contexte cible, cycle 3)[2]

On tire avec des fléchettes dans une cible avec une zone à 7 points et une zone à 5 points, on gagne les points de la zone où arrive la flèche. Après avoir joué plusieurs fois, peut-on obtenir un total de 113 points ?

Autre valeur pour la somme : 23 points.

Analyse a priori

Ce problème a comme objectif didactique de percevoir qu'un problème numérique peut avoir plusieurs solutions, que résoudre un problème numérique ne se résume pas à prendre les nombres de l'énoncé, choisir des opérations et effectuer les calculs correspondants. Un autre objectif possible avec d'autres valeurs pour la somme (énoncé C et somme 23) serait de percevoir que tout problème mathématique n'admet pas forcément une solution.

Type de tâches et tâches

Type de tâches : résoudre un problème à deux contraintes.
Tâche 1 : décomposer 23 en somme de « 2 » et de « 5 ». Les deux contraintes sont : « somme égale à 23 », « des 2 et des 5 uniquement comme termes de la somme ».
Tâche 2 : décomposer 42 en somme de « 2 » et de « 5 ».
Tâche 3 (CM2) : décomposer 113 en somme de « 5 » et de « 7 ».
Tâche 4 (cycle 2 et 3) : décomposer 23 en somme de « 5 » et de « 7 ».
La tâche pour l'énoncé M est formulée dans le contexte des grandeurs, ce qui peut permettre une représentation du but à atteindre plus facile pour les élèves.

Solutions mathématiques

Dans le cas où $S = 23$, deux solutions : 9 pièces de 2 euros et 1 billet de 5 euros ; 4 pièces de 2 euros et 3 billets de 5 euros ;
Dans le cas où $S = 42$: quatre solutions : 16 pièces de 2 euros et 2 billets de 5 euros ; 11 pièces de 2 euros et 4 billets de 5 euros, 6 pièces de 2 euros et 6 billets de 5 euros ; 1 pièce de 2 euros et 8 billets de 5 euros.

---

[1] ERMEL. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CE2*. Hatier
[2] Clavier, C. et Peltier, M.-L. (2005) *Calcul mental au cycle 2 Des activités pour une entraînement quotidien*. Collection Mosaïque. Hatier

Dans le cas de l'énoncé M avec $S = 113$, trois solutions : 17 flèches dans la zone 5 points et 4 dans celle 7 points ; 10 flèches dans la zone 5 points et 9 dans celle 7 points ; 3 flèches dans la zone 5 points et 14 dans celle 7 points.
Dans le cas de l'énoncé M avec $S = 23$, pas de solutions. On s'en rend compte (assez) rapidement : $7 \times 3 = 21$, le complément à 23 n'est pas un multiple de 5. De même en multipliant 7 par 2, par 1. Et 23 n'est pas un multiple de 5.
Pour le professeur : la modélisation mathématique de cet énoncé de problème est une équation dite diophantienne (voir compléments ci-dessous).

Techniques de résolution

L'ordre de prise en compte des différentes contraintes débouche généralement à des techniques différentes. Nous donnons les techniques pour l'énoncé monnaie avec $S = 23$ et indiquons ensuite quelles techniques semblent être plus difficiles à mettre en œuvre avec $S = 42$ ou avec l'énoncé C.

Technique 1a (essais-rectifications)

- À partir de la contrainte « somme de 23 »,
  - matériellement à partir d'une collection de 23 objets en déplaçant des objets pour constituer des sous-collections de 2 et 5 objets ; on effectue les rectifications nécessaires afin d'obtenir une organisation de la collection en sous-collections de 2 et 5 objets uniquement ;
  - graphiquement en constituant des paquets de 2 et de 5 (en entourant, surlignant …) ;
  - numériquement sur la bande numérique par des sauts de 2 et de 5 « en arrière » à partir de 23 ;
  - numériquement par des soustractions successives de 2 et de 5 (mentalement ou à la calculatrice) à partir de 23.

Avec $S = 42$, les deux premières techniques semblent plus coûteuses à mettre en œuvre.

Technique 1b (essais-rectifications)

- À partir de la contrainte « uniquement des 2 ou/et des 5 »,
  - matériellement en essayant d'obtenir 23 en rassemblant des collections de 2 et 5 objets (qui peuvent être éventuellement dans des sachets transparents) ;
  - en utilisant le matériel représentant la monnaie en essayant de faire 23 € avec les deux types de pièces (calcul mental) ;
  - graphiquement en essayant d'obtenir 23 en dessinant des collections de 2 et 5 déjà constituées en paquets de 2 et de 5 ;
  - numériquement sur la bande numérique par des sauts de 2 et de 5 « en avant » à partir de zéro et en essayant de tomber sur la case 23 ;
  - numériquement par des additions successives de 2 et de 5 (mentalement ou à la calculatrice) en essayant d'obtenir 23.

Technique 2a (exhaustion des cas)

- À partir de la contrainte « somme de 23 »,

- matériellement à partir d'une collection de 23 objets on fait le maximum de paquets de 5 (4 paquets de 5) et on essaie de compléter par paquets de 2, puis on fait 3 paquets de 5 et on essaie de compléter par paquets de 2, puis à partir de 2 paquets de 5 ... puis sans paquet de 5 ;
- graphiquement à partir de plusieurs collections de 23 représentées en « entourant » (soulignant, etc.) des paquets de 2 et de 5 :
  Cas 1 : $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X}$. X
  Cas 2 : $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$
  Cas 3 : $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. X
  Cas 4 : $\boxed{X.X.X.X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$
  Cas 5 : $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. $\boxed{X.X}$. X
- numériquement sur la bande numérique par examen de tous les sauts possibles de 2 et de 5 « en arrière » à partir de 23 en les organisant, par exemple en commençant par le maximum de sauts de 5 que l'on peut effectuer (4 sauts), puis 3 sauts, etc. ;
- numériquement par test de toutes les soustractions possibles de 2 et de 5 (mentalement ou à la calculatrice) à partir de 23, en commençant par soustraire le plus grand nombre de 5, puis en diminuant le nombre de termes 5 soustraits:

$$23-5-5-5-5-2=1\,;$$
$$23-5-5-5-2-2-2-2=0\,;$$
$$23-5-5-2-2-2-2-2-2=1\,;$$
$$23\ -5-2-2-2-2-2-2-2-2-2=0\,;\ \ldots$$

Remarque : on pourrait faire de même avec le maximum de 2 (puis en diminuant le nombre de 2) en essayant de compéter avec des multiples de 5. Celle-ci est plus coûteuse en essais à réaliser.

- numériquement par test de tous les multiples de 5 inférieurs ou égaux à la somme S, en cherchant le complément du multiple à S, en regardant si ce complément est un multiple de 2 (nous employons le mot multiple pour la description, non connu forcément des élèves, mais que l'on pourra introduire en situation en cycle 3) :
  $23-4\times 5=3$, non multiple de 2 ; $23-3\times 5=8$, multiple de 2, d'où $23=3\times 5+4\times 2$; $23-2\times 5=13$, non multiple de 2 ; $23-1\times 5=18$, multiple de 2, d'où $23=1\times 5+8\times 2$.

Remarque : cette technique est une évolution de la technique précédente, en utilisant la multiplication comme outil simplificateur par rapport à la soustraction réitérée, c'est celle que l'on visera en cycle 3 en changeant les valeurs des variables didactiques en prenant l'énoncé C, avec une cible avec une zone à 7 points (si l'on cherche à motiver l'apprentissage de la table de 7) et une zone à 5 points et une somme de 113 points.

Technique 2b (exhaustion des cas)

➢ À partir de la contrainte uniquement des 2 ou/et des 5,

- matériellement en essayant d'obtenir 23 en rassemblant des paquets de 5 jetons puis des paquets de 2 jetons de toute les façons possibles ; pour cela on organise l'examen de tous les possibles avec 4 sachets de 5, puis 3 sachets de 5, puis 2 sachets de 5 puis 1 sachet de 5 puis uniquement avec des sachets de 2 ;

- en utilisant le matériel représentant la monnaie en essayant méthodiquement toutes les façons possibles de faire 23 € avec les deux types de pièces (comme précédemment) ;
- à partir de plusieurs collections de 5 et de 2 (comme précédemment mais les objets matériels ne sont plus ici manipulables mais sont représentés) ;
- numériquement sur la bande numérique par examen de tous les sauts possibles de 2 et de 5 « en avant » à partir de 0 permettant d'aboutir sur 23 ;
- numériquement par test de toutes les additions possibles de 2 et de 5 (mentalement ou à la calculatrice) permettant d'approcher 23 ;
  5 + 5 + 5 + 5 + 2 + 2 = 24 ; 5 + 5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 = 23 ; 5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 24 ;
  5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 23 ; 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 24.

Remarque : on pourrait faire de même avec le maximum de 2 (puis en diminuant le nombre de 2) en essayant de compéter avec des paquets de 5).

Complément (pour aller plus loin) : la technique algébrique (en introduisant des lettres) consiste à :

- dans un premier temps modéliser par une équation dite diophantienne (équation où les inconnues sont multipliées par un entier et dont on recherche les solutions entières) : $2x + 5y = 23$ ou $2x + 5y = 42$ où x est le nombre de pièces de 2 € et y celui de 5 € ;
- puis à résoudre l'équation. Une technique de résolution est abordée en Terminale option « mathématiques expertes ».

Nous remarquons que des problèmes pour apprendre à chercher peuvent être proposés bien avant qu'une technique de résolution systématique soit disponible.

Variables didactiques

- Le matériel à disposition : monnaie (le regroupement est déjà effectué), jetons (les collections de 2 ou 5 sont à effectuer), bande numérique, calculatrice ;
- Le nombre de solutions pour une somme S ; pour que l'objectif didactique ci-dessus soit atteint, il faut proposer une valeur de S pour laquelle il y a au moins deux solutions. Une valeur de S pour laquelle il y a au moins trois solutions pourra inciter à passer à une technique par exhaustion plutôt que par essais non organisés. Si l'on se fixe comme objectif « se rendre compte que tout problème mathématique n'a pas forcément une solution », les seules valeurs de S avec les termes 2 et 5 pour lesquelles il n'y a pas de solutions sont $S = 1$ et $S = 3$, ce qui n'est pas intéressant à proposer en classe. Pour les termes 5 et 7 (énoncé C), pour $S = 23$ il n'y a pas de solutions.
- Le nombre d'entiers donnés intervenant dans la décomposition ; ici il y a deux entiers, 2 et 5 ou 5 et 7 ; avec trois entiers cette variable va jouer sur la complexité des procédures (nombre de calculs à effectuer) ;
- Les entiers intervenant dans la décomposition ; ici 2 et 5 permettent un calcul mental assez aisé ; si on souhaite inciter les élèves à mémoriser les tables (par exemple celle de 7) pour améliorer la rapidité des essais en calcul mental sans calculatrice, on proposera 5 et 7.
- La « taille » de la somme. Si la « taille » est importante, par exemple 113, les techniques avec des dessins ou des jetons seront coûteuses et vraisemblablement abandonnées.

Descriptif, mise en œuvre

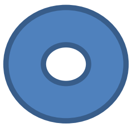
Le descriptif est donné pour l'énoncé M avec $S = 23$, avec les variantes éventuelles pour les autres énoncés avec des solutions. Pour l'énoncé sans solution, les deux premières étapes sont identiques, lors de la troisième étape on indiquera comment gérer la mise en commun.

1) *Première étape : calcul mental et dévolution* (en grand groupe classe)

Possibilité pour la dévolution : calcul mental avec ardoise
Une pièce de 2 euros et un billet de 5 euros sont montrés : « voici une pièce de 2 euros. Voici un billet de 5 euros. Si je les mets ensemble combien d'euros ai-je ? » (ardoises levées, un élève est interrogé) ; « Si je mets ensemble 3 pièces de 2 euros et 2 pièces de 5 euros, combien d'euros ai-je ?" (un élève est interrogé, réponse attendue : 16 euros).
Le professeur présente les deux résultats dans un tableau comme ci-dessous, qui est effacé au début de la recherche des élèves. Pour présenter le problème il écrit ensuite dans la dernière ligne la somme 23 et pose la question :
« Si on donne la somme de 23 euros, peut-on l'obtenir avec uniquement des pièces de 2 euros et des billets de 5 euros. Si oui comment ? »

Nombre de pièces de 2 euros	Nombre de billets de 5 euros	Somme en euros
1	1	7
3	2	16
		23

Pour l'énoncé de la cible, une cible est dessinée, projetée.
L'énoncé est ensuite distribué à chaque élève et est affiché au tableau. Le tableau ci-dessus est effacé.
Suggestion matérielle : pour des questions de probabilités, nous conseillons que le rayon du disque intérieur (zone à 7 points) soit au plus égal au 2/5 du rayon du cercle extérieur.



Autre possibilité pour la dévolution : mimer l'énoncé du problème avec des pièces et des billets (en les mettant dans une boîte fermée) sans faire de calcul mental.

Le professeur met à disposition des jetons ou du matériel « monnaie », des calculatrices sur une table en indiquant que les élèves peuvent venir le chercher s'ils en ont besoin.

2) *Deuxième étape : recherche 1 (individuelle)*

Le professeur laisse chercher les élèves en repérant les essais, si les élèves tirent parti des essais, si des élèves ont trouvé une, plusieurs solutions.

3) *Troisième étape : mise en commun 1*

Si beaucoup d'élèves n'atteignent pas 23, le professeur peut effectuer une mise en commun intermédiaire avec examen d'une production atteignant un nombre différent ou utilisant d'autres nombres que 2 et 5 de façon à mettre en évidence les deux contraintes.
Le professeur effectue un premier bilan en mettant en évidence les contraintes.
Quand il y a plusieurs élèves ayant une des deux (respectivement quatre, trois) solutions, le professeur recueille une solution puis demande si d'autres élèves ont trouvé cette solution. « Qui a une autre solution à proposer ? »

Si personne n'a trouvé d'autres solutions, le professeur indique qu'il peut y en avoir d'autres et remet les élèves en recherche. Si toutes les solutions ont été trouvées (possible dans le cas de l'énoncé M avec $S = 23$) on passe directement à la cinquième étape.
Pour l'énoncé sans solution : si des élèves supposent qu'il n'y a pas de solution, le professeur relance en disant : « Avez-vous fait tous les essais possibles ? Est-on sûr qu'il n'y a pas de solution ? »

4) *Quatrième étape : recherche 2 (groupe, binôme ou individuelle)*

Le professeur anime la recherche avec des relances éventuelles. Pour l'énoncé avec quatre solutions, le professeur peut indiquer que toutes les solutions n'ont pas encore été trouvées.

5) *Cinquième étape : mise en commun 2*

Le professeur recense les solutions et effectue une synthèse des méthodes utilisées.

6) Sixième étape : nouvelle somme

Pour l'énoncé M avec $S = 23$, suivant la durée jusqu'à cette étape on pourra reporter au lendemain. On propose comme nouvelle somme 42 euros (quatre solutions). On pourra proposer l'énoncé C plus tard dans l'année.

Pour l'énoncé C nous suggérons de différer dans le temps l'énoncé sans solution.

7) Septième étape : institutionnalisation

Institutionnalisation dans le cas de plusieurs solutions

Institutionnalisations possibles sur les techniques de recherche, en fonction des procédures apparues dans la classe :

- On regarde si les essais vérifient les contraintes correspondantes aux informations présentes dans l'énoncé ;
- On peut commencer en prenant en compte une des contraintes puis on cherche si l'essai vérifie les autres contraintes ;
- On peut chercher tous les cas possibles en testant chacun des cas pour voir s'il vérifie les contraintes.

Autres institutionnalisations possibles :

- Un problème numérique peut avoir plusieurs solutions.
- Pour résoudre certains problèmes numériques, il ne suffit pas de prendre les nombres de l'énoncé, choisir des opérations et effectuer les calculs correspondants.
- On peut s'aider de matériel, de représentations graphiques, de représentations particulières des nombres possibles (bande numérique, droite numérique, tableau des nombres…), puis chercher comment s'en passer en raisonnant sur les nombres.

Institutionnalisation dans le cas d'absence de solutions

Un problème peut ne pas avoir de solutions. Dans le cadre d'un problème numérique, pour être sûr qu'il n'y a pas de solutions, il faut effectuer tous les essais possibles.

Réinvestissement, programmation possible

CP : l'énoncé M avec $S = 23$.

CE1 : l'énoncé M avec $S = 23$ et plus tard dans l'année $S = 42$.

CE2 : l'énoncé M avec $S = 23$, puis à la séance suivante $S = 42$. Plus tard dans l'année les énoncés C.

CM1-CM2 : l'énoncé M avec $S = 42$. Peu de temps après l'énoncé C avec $S = 113$, puis plus tard celui sans solutions.

Compte-rendu d'expérimentation

Si on utilise plusieurs énoncés, indiquer les dates auxquelles ont été proposés les différents énoncés.

Déroulement	Commentaires

2. Problème A2 Jeu de cartes[3] (à partir du CM1)

« Un jeu de cartes est composé de deux types de cartes. Les unes représentent un carré, les autres un triangle. Six groupes sont faits dans la classe. Trois cartes sont distribuées à chaque groupe. Je ramasse ensuite l'ensemble des cartes et je compte le nombre total de côtés et j'obtiens 60. Quel est le nombre de cartes de type « carré » et le nombre de carte de type « triangle » ?

Variante : en donnant d'emblée le nombre de cartes distribuées et sans contexte

« Un jeu de cartes est composé de deux types de cartes. Les unes représentent un carré, les autres un triangle. Je distribue 18 cartes et je ramasse ensuite les cartes et je compte le nombre total de côtés et j'obtiens 60. Quel est le nombre de cartes de type « carré » et le nombre de carte de type « triangle » ?

Analyse a priori

Mathématiquement

Type de tâches : résoudre un problème à deux contraintes

Tâche : décomposer 60 en somme de deux multiples de 3 et 4 avec une deuxième contrainte sur le nombre de cartes, ici 18, ce nombre étant à déterminer par les élèves ou non si on choisit la variante. Pour le professeur : une modélisation mathématique de cet énoncé est un système de deux équations à deux inconnues. Les valeurs choisies sont telles qu'il y a une unique solution.

[3] Document d'accompagnement 2002 eduscol « Les problèmes pour chercher ».

Techniques de résolution

Technique 0 : tâtonnements (essais sans en tirer parti)

Technique 1 : essais en tirant partie des essais précédents

Exemple 1 : Un premier essai en supposant qu'il y a autant de cartes « carré » que « triangle » : 9 cartes de chaque type. Donc en tout 63 côtés. Trop de côtés. Les élèves diminuent d'un le nombre de cartes « carré » et augmentent de 1 le nombre de celles « triangle ». Ils recalculent le nombre de côtés, puis recommencent jusqu'à arriver à 60.

Exemple 2 : Un premier essai en supposant qu'il y a 5 cartes « carré » et 13 cartes « triangle ». Donc en tout 85 côtés. Trop de côtés. Les élèves diminuent de 2 le nombre de cartes « carré » (car 85 est « bien plus grand que 60 ») et augmentent de 3 le nombre de celles « triangle », se rendent compte qu'il y a trop de cartes. Ils recalculent le nombre de côtés pour 7 cartes carrées et 11 cartes triangles, arrivent à 61 et ne voient pas comment arriver à 60.

Technique 2 : tous les essais possibles

Méthode 1 : en satisfaisant la contrainte du bon nombre de cartes : commencement à 18 cartes « carré » et pas de carte « triangle ». Puis ils diminuent de 1 et augmentent de 1 pas à pas en recalculant à chaque fois. Les élèves risquent de s'arrêter devant la multiplicité des calculs à effectuer, sauf s'ils peuvent recourir à du calcul instrumenté, type calculatrice ou tableur. L'intérêt du tableur est qu'il permet d'effectuer tous les essais possibles et de les avoir tous disponibles simultanément.

Méthode 2 : en satisfaisant la contrainte du bon nombre de côtés : par exemple commencement avec uniquement des cartes « carré », 15 cartes « carré », 0 carte « triangle » ; ici pour conserver le même nombre de côtés il faut échanger 3 cartes « carré » contre 4 cartes « triangles » ; prendre cette contrainte « bon nombre de carrés » et trouver l'échange conservant le bon nombre de côtés nous semble peu probable pour des élèves ; éventuellement les élèves peuvent partir de 15 cartes « carré » et en enlever une, se rendre compte que l'on a 56 côtés et que l'on peut pas compléter par des cartes « triangles » de façon à garder 60 côtés. On poursuit avec 13 cartes avec la même conclusion, puis avec 12 cartes qui fait apparaître que l'on peut compléter avec 4 cartes « triangle ».

Remarques

Le tableur permet de tester tous les cas possibles et de valider qu'il y a une unique solution au problème posé (validation qui sera possible avec la technique 3 ci-dessous sous réserve que le professeur pose la question).

En offrant une puissance de calcul, le tableur ne favorise pas le raisonnement d'échange (voir technique 3) permettant de s'économiser des calculs.

Technique 3 : plusieurs essais organisés

Au bout de plusieurs essais les élèves peuvent se rendre compte qu'enlever une carte « carré » (4 côtés) et remettre une carte « triangle » (3 côtés) revient à enlever 1 au nombre de côtés mais ne change pas le nombre de cartes.

Exemple : 1) : « J'ai 18 cartes, toutes des carrés » ou 1') : « J'ai 18 cartes, toutes des triangles » …et 2) : « je vais corriger pas à pas en organisant ma recherche. Après avoir enlevé plusieurs fois un carte « carré » et remis une carte « triangle », ils se rendent compte de la règle d'échange.

15 cartes « carré » et 3 cartes « triangle » (69) c'est trop ; en enlevant un carré et en remettant un triangle, j'ai toujours le même nombre de cartes, et j'ai un côté de moins.

14 cartes « carré » et 4 cartes « triangle » ($69 - 1 = 68$*), c'est encore trop. Je continue.*

…..

8 cartes « carré » et 10 cartes « triangle » (62), c'est encore trop. Je continue.

6 cartes « carré » et 12 cartes « triangle » (60), c'est bon. »

Les élèves s'arrêtent une fois qu'ils ont trouvé une solution.

Remarque : lors de la mise en commun, si cette technique émerge, le professeur demandera si c'est la seule solution. Un argument accessible pour des élèves consiste à évoquer la règle d'échange et à constater que si l'on continue les échanges, le nombre de côtés diminue.

Technique 4 : fausse position : un essai « au hasard » (mais plausible) et une seule rectification par détermination de l'écart à ce que l'on doit atteindre.

Exemple : premier essai : 10 cartes « carrés » et 8 cartes « triangles », c'est 64 côtés, c'est trop de côtés. L'écart entre 64 et 60 est de 4. À chaque échange d'une carte « carré » contre une carte « triangle », on diminue le nombre de côtés de 1. Il faut donc faire 4 échanges. La solution est : 6 cartes « carrés » et 12 cartes « triangles ».

Descriptif, mise en œuvre

1) *Première étape : calcul mental et dévolution (*en grand groupe classe)

Calcul mental avec ardoise :
Les cartes sont présentées. Le professeur montre 3 cartes « carré » et 5 cartes « triangle » et demande combien il y a de côtés sur l'ensemble des cartes. Puis 7 cartes « carré » et 10 cartes « triangle ».
Puis l'énoncé est distribué, lu par un élève. On remarque que dans l'énoncé le nombre de côtés est donné. La question est posée : « que doit-on chercher ? »

2) *Deuxième étape : recherche 1 (individuelle)*

Le professeur laisse chercher les élèves en repérant les essais, si les élèves tirent parti des essais.

3) *Troisième étape : mise en commun 1*

Une production où aucune des contraintes n'est respectée est proposée. On met en évidence qu'il y a deux contraintes : le nombre de cartes distribuées, le nombre total de côtés. Pour la première version de l'énoncé, on fait émerger que 3 cartes distribuées à 6 groupes correspond à un total de 18 cartes.

4) *Quatrième étape : recherche en groupe de 3-4 élèves*

Le professeur observe comment les élèves tirent parti des essais, si des élèves le sollicitent pour savoir si c'est « la bonne réponse », le professeur renvoie au groupe en demandant « est-ce que votre solution vérifie les deux contraintes ? ». Si aucun groupe ne trouve de solution dans le temps de recherche proposé, le professeur propose une mise en commun intermédiaire collective.
Comment relancer si tous les groupes effectuent des essais sans en tirer parti ou sans s'organiser ?

- On peut lister les productions en plaçant d'un côté celles qui satisfont la contrainte "18 cartes" (et de l'autre celles satisfaisant "60 côtés"). Collectivement, on prend conscience qu'il reste d'autres répartitions à tester. On pourra suggérer une organisation avant de relancer la recherche.

Pour 18 cartes en tout		
Nombre de cartes "carré"	Nombre de cartes "triangle"	Nombre de côtés en tout

5) Cinquième étape : mise en commun

Un groupe présente comment il a effectué ses essais. Le professeur choisit un groupe ayant effectué des essais organisés, tirant parti des essais précédents mais n'ayant pas abouti à la solution. Suivant le type d'organisation des essais de l'ensemble des groupes d'élèves, le professeur demande :

- Q1 : comment s'organiser pour effectuer tous les essais possibles ;
- Q2 : comment s'organiser pour ne pas refaire les calculs à chaque fois ;
- Q3 : comment après un seul essai trouver rapidement l'essai qui pourrait donner une solution.

À la première rencontre de ce type de problème, ce sera plutôt la question Q1 et éventuellement Q2, le professeur visera après plusieurs problèmes de ce type la question Q3.

Institutionnalisations possibles

- Il y a plusieurs méthodes pour résoudre un problème ;
- On peut faire l'inventaire des contraintes et les satisfaire les unes après les autres ;
- On cherche une organisation pour s'assurer qu'on examine tous les cas possibles et pour chaque cas on regarde s'il vérifie une ou plusieurs contraintes.

  En posant la question 3 ci-dessus, le professeur pourra faire émerger la technique 4 et proposer une institutionnalisation comme suit :
- On fait un essai en respectant une des contraintes (ici le bon nombre de cartes), on choisit une répartition au hasard[4] pour une des contraintes (17-1, 9-9 par exemple), on trouve la règle d'échange : si on remplace une carte « carré » (ou une carte « triangle ») par une carte « triangle » (ou une carte « carré »), on ne change pas le nombre de cartes et on diminue (ou on augmente) d'une unité le nombre total de côtés.
  On cherche en une seule fois le bon nombre d'échanges pour vérifier la deuxième contrainte.

[4] Dite *fausse position*

Compte-rendu d'expérimentation

Déroulement	Commentaires

3. Problème A3 : La tirelire[5] (CM1- CM2)

Énoncé CM2

Dans ma tirelire j'ai 32 pièces de monnaie ; je n'ai que des pièces de 20 centimes et 50 centimes. Avec ces 32 pièces, j'ai 9,70 euros. Combien y a-t-il de pièces de 20 centimes et de 50 centimes dans ma tirelire ?

On peut donner ce problème à partir du CM1 avec des nombres entiers.

Analyse a priori

Analyse mathématique

Type de tâches : résoudre un problème à deux contraintes

Tâches : décomposer 970 en somme de deux multiples de 20 et 50 avec une deuxième contrainte.

Ou décomposer 9,70 en somme d'un nombre entier de fois 0,20 et d'un nombre entier de fois 0,50 avec une deuxième contrainte.

Techniques

Technique 1 : essais aléatoires, tâtonnement

> L'élève essaie 10 pièces de 20 c et 22 pièces de 50 c, il trouve une somme de 13 euros. Le second essai se fait avec 5 pièces de 20 c et 27 pièces de 50 c. L'élève ne tire pas parti du fait que la somme trouvée est supérieure à celle visée et donc qu'on a intérêt à diminuer le nombre de pièces de 50 c.

Technique 2 : essais avec ajustements

> L'élève prend en compte la somme trouvée lors du premier essai, avec l'essai de 10 pièces de 20 c et 22 pièces de 50 c, il diminue le nombre de pièces de 50 c. Au bout de plusieurs essais les élèves peuvent se rendre compte qu'enlever une pièce de 50 c et remettre une pièce de 20 c revient à enlever 30 c.
> Exemple : J'ai 32 pièces, toutes de 50 c, cela fait 16 euros, c'est trop. 16 pièces de 50 c et 16 pièces de 20 c, cela fait 11,20 euros. C'est encore trop. 15 pièces de 50 c et 17 pièces de 20 c, cela fait 10,90 euros. Il y a encore 1,20 euros de trop. En échangeant 4 pièces de 50 c contre des pièces de 20 c, on garde le même nombre de pièces et on a 4 fois 30 c en moins.

Difficultés envisagées :

- dans l'organisation des essais, trouver un parcours des cas possibles permettant d'être sûr de les passer tous en revue ;

[5] ERMEL. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2*. Hatier

- prendre en compte les deux contraintes du problème.

Technique 3 : Essai suivi d'une seule rectification : technique dite de la fausse position

> 22 pièces de 50 c et 10 pièces de 20 c, soit 13 euros ; 3,30 euros en trop. L'écart entre 50 c et 20 c, c'est de 30 c, chaque fois qu'on échange une pièce de 50 c contre une pièce de 20 c, on enlève 30 c. On doit enlever 330 c. Combien de fois 30 dans 330 (centimes d'euros) ? On doit échanger 11 pièces de 50 c contre 11 pièces de 20 c. On a donc 11 pièces de 50 c et 21 pièces de 20 c.

Difficultés envisagées :

- accepter de s'arrêter après un seul essai ;
- établir la règle de transformation du montant global lors d'un changement d'une pièce d'une sorte contre une pièce de l'autre sorte ;
- à partir de la règle d'échange, calculer le nombre d'échanges nécessaires et ainsi le nombre de pièces de chaque sorte.

Technique 4 : Essais systématiques, c'est-à-dire exhaustion de tous les cas en satisfaisant la contrainte sur le nombre total de pièces.

Matériel 1 : Pour des classes où les élèves ont déjà travaillé avec le tableur, en particulier la notion de formule que l'on recopie.

Tableau avec les sommes, puis avec les formules

Nombre de pièces de 20 c	Nombre de pièces de 50 c	Somme disponible en euros
0	32	16
1	31	15,7
2	30	15,4
3	29	15,1
4	28	14,8
5	27	14,5
6	26	14,2
7	25	13,9
8	24	13,6
9	23	13,3
10	22	13
11	21	12,7
12	20	12,4
13	19	12,1
14	18	11,8
15	17	11,5
16	16	11,2
17	15	10,9
18	14	10,6
19	13	10,3
20	12	10
21	11	9,7
22	10	9,4

23	9	9,1
24	8	8,8
25	7	8,5
26	6	8,2
27	5	7,9
28	4	7,6
29	3	7,3
30	2	7
31	1	6,7
32	0	6,4

Nombre de pièces de 20 c	**Nombre de pièces de 50 c**	**Somme disponible en euros**
0	=32-A2	=A2*0,2+B2*0,5
=A2+1	=32-A3	=A3*0,2+B3*0,5
=A3+1	=32-A4	=A4*0,2+B4*0,5
=A4+1	=32-A5	=A5*0,2+B5*0,5
=A5+1	=32-A6	=A6*0,2+B6*0,5
=A6+1	=32-A7	=A7*0,2+B7*0,5
=A7+1	=32-A8	=A8*0,2+B8*0,5
=A8+1	=32-A9	=A9*0,2+B9*0,5
=A9+1	=32-A10	=A10*0,2+B10*0,5
=A10+1	=32-A11	=A11*0,2+B11*0,5
=A11+1	=32-A12	=A12*0,2+B12*0,5
=A12+1	=32-A13	=A13*0,2+B13*0,5
=A13+1	=32-A14	=A14*0,2+B14*0,5
=A14+1	=32-A15	=A15*0,2+B15*0,5
=A15+1	=32-A16	=A16*0,2+B16*0,5
=A16+1	=32-A17	=A17*0,2+B17*0,5
=A17+1	=32-A18	=A18*0,2+B18*0,5
=A18+1	=32-A19	=A19*0,2+B19*0,5
=A19+1	=32-A20	=A20*0,2+B20*0,5
=A20+1	=32-A21	=A21*0,2+B21*0,5
=A21+1	=32-A22	=A22*0,2+B22*0,5
=A22+1	=32-A23	=A23*0,2+B23*0,5
=A23+1	=32-A24	=A24*0,2+B24*0,5
=A24+1	=32-A25	=A25*0,2+B25*0,5
=A25+1	=32-A26	=A26*0,2+B26*0,5
=A26+1	=32-A27	=A27*0,2+B27*0,5
=A27+1	=32-A28	=A28*0,2+B28*0,5
=A28+1	=32-A29	=A29*0,2+B29*0,5
=A29+1	=32-A30	=A30*0,2+B30*0,5
=A30+1	=32-A31	=A31*0,2+B31*0,5
=A31+1	=32-A32	=A32*0,2+B32*0,5
=A32+1	=32-A33	=A33*0,2+B33*0,5

=A33+1	=32-A34	=A34*0,2+B34*0,5

Difficultés envisagées :

- Prise en compte des relations entre les éléments d'une même ligne ; le fait de fournir les en-têtes du tableau peut permettre à certains élèves de structurer leur recherche et d'envisager le "cas par cas".
- Connaissance du tableur et de sa syntaxe

Matériel 2 : Tableau double entrée, dans les cas la somme des multiples de 20 et 50, dans les en-têtes de colonne le nombre de pièces de 20 c, dans celles de lignes le nombre de pièces de 50 c. On ne remplit que les cases où la contrainte de 32 pièces est respectée.

Nombre de pièces de 20c\nombre de pièces de 50c	0	1	2	3	….					32
0										= 16
1										
2										
….										
31		= 0,2+15,5								
32										

Difficulté envisagée : prévoir le nombre de colonnes et lignes du tableau, les cases à remplir pour que la contrainte de 32 pièces soit vérifiée.

Technique 5 : experte niveau lycée (cette technique est proposée ici pour information pour le professeur)

Désignons respectivement par x et y les nombres de pièces de 20 c et 50 c. x et y sont solutions du système : $\begin{cases} x+y=32 \\ 0{,}2x+0{,}5y=9{,}70 \end{cases}$

Conseil : travailler le même type de problème avec des données différentes plusieurs fois dans l'année.

Compétences travaillées

- Organiser ses essais ;
- Prendre en compte, dans la résolution du problème, deux contraintes : nombre total de pièces et somme totale.

Aides possibles (soit directement pour le problème, soit en proposant un autre problème)

- Remplacer les nombres décimaux non entiers par des entiers :

  Travailler avec les centimes d'euros ici.
- Résoudre un problème à une seule contrainte :

Exemple (autre problème) : « au rugby, un essai rapporte 5 points, un essai transformé 7 points. Peut-on obtenir un score de 38 points ? »

- Proposer un matériel pour garder à l'esprit la contrainte :

  Exemple (autre problème) : « on dispose de 18 jetons. Certains valent 5, d'autres valent 7 et on veut obtenir une somme de 110 ».

  On propose aux élèves un matériel sous forme d'une bande de 18 cases et des jetons :

																		Somme :

Le matériel prend en charge la contrainte sur le nombre de jetons qui doit être égal à 18 (chaque case doit contenir un jeton).
Retour au problème initial avec 32 colonnes et des 20 c et 50 c en gardant l'aide fournie.

Moyens de validation

Avec la bande fournie : calcul de la somme puisque la contrainte sur le nombre de pièces est prise en charge par le matériel
Sans la bande : calcul de la somme et calcul du nombre de jetons.

Institutionnalisation prévue

a) Il peut être pertinent de faire des essais mais il est important d'observer ce qui change entre les essais.
b) dans un problème à plusieurs contraintes, je peux en satisfaire une puis corriger ma proposition pour satisfaire l'autre également.
c) quand le nombre de cas à tester est limité, on peut dresser la liste de tous les cas possibles.

Mise en œuvre avec grandes phases, questions cruciales, moments où donner l'aide ; des exemples de mise en œuvre

Phase 1 calcul mental

Nous proposons une phase de calcul mental en liaison avec le problème pour faciliter la dévolution du problème.
Les élèves partagent leur ardoise ou cahier du jour en deux colonnes, l'une pour écrire le nombre de pièces, l'autre la somme.
Le professeur présente la situation : « dans ma tirelire je ne mets que des pièces de 20 c et de 50 c.
Je veux savoir combien de pièces j'ai et quelle est la somme dans la tirelire. »
Il propose par oral les trois contenus de tirelire suivants, les élèves notent à la suite sur leur ardoise, le professeur note au fur et à mesure les réponses au tableau, soit en les présentant dans un tableau comme ci-dessous (aide implicite pour l'organisation des essais pour la phase de recherche), soit de façon linéaire (comme en bleu ci-dessous). Suivant le moment de l'année et le choix pour l'énoncé, il propose d'écrire la somme en euros ou en centimes d'euros.
5 pièces de 20 c et 10 pièces de 50 c. 15 pièces et somme : 6 €
8 pièces de 20 c et 5 pièces de 50 c. 13 pièces et somme : 4,10 €
15 pièces de 20 c et 7 pièces de 50 c. 22 pièces et somme : 6,50 €
Puis il propose le problème en inscrivant dans le tableau ou de façon orale :

Nombre de pièces de 20 c	Nombre de pièces de 50 c	Nombre total de pièces	Somme dans la tirelire
5	10	15	6 €
8	5	13	4,10 €
15	7	22	6,50 €
?	?	32	9 ,70 €

Phase 2

Distribution du problème
Recherche individuelle puis en groupe (taille à déterminer par le professeur).

Phase 3 : première mise en commun

Le PE propose à deux groupes ayant pris en compte une seule contrainte d'exposer leur solution, leur recherche. Il établit avec eux le constat qu'il y a deux contraintes, que la "solution" proposée ne satisfait pas toutes les contraintes de l'énoncé.

Phase 4 : relance avec proposition d'aide

Suivant les recherches, le professeur propose une ou plusieurs aides.
Nouvelle phase de recherche

Phase 5 : deuxième mise en commun

Lors de la mise en commun : faire expliciter comment on passe d'une fausse position à une autre fausse position lorsque l'on échange une pièce de 20 c avec une pièce de 50 c par exemple (en s'aidant de l'aide avec la bande ci-dessus ou non).
Les élèves doivent être tentés d'effectuer plusieurs changements.
Nouvelle recherche (courte).
Pour passer du tâtonnement à la méthode de fausse position, il faut avoir pris conscience de la nécessité de mesurer l'effet d'une transformation plutôt que recalculer un nouvel état final.

Phase 6 : validation de la solution correcte

On soumet à la classe la production d'un groupe ayant trouvé la solution correcte. Validation par les élèves en vérifiant que les deux contraintes sont bien satisfaites.

Phase 7 : institutionnalisation

À partir de celle proposée ci-dessus.

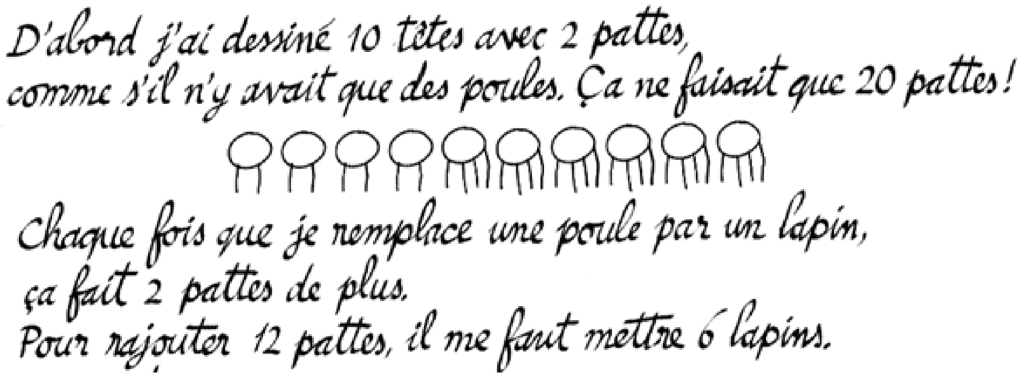
Prolongements, autres variantes à poser plus tard dans l'année

Dans la ferme d'Anna, il y a des poules et des lapins. Elle a compté 10 têtes et 32 pattes. Combien a-t-elle de lapins ?

D'autres valeurs numériques sont proposées dans le guide du M.E.N « *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* », eduscol janvier 2022.

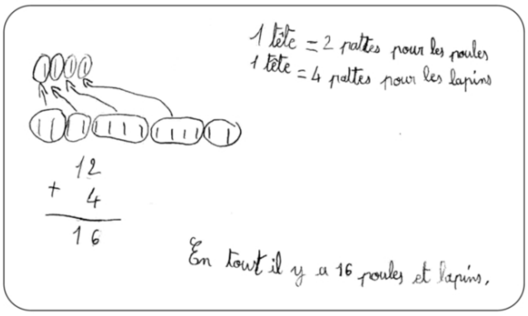
« Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. Pour faire chercher le nombre de poules et de lapins à son frère, Cindy lui dit qu'il y a 114 pattes et 40 têtes. Combien y a-t-il de poules et combien y a-t-il de lapins dans la ferme ? »

Exemple de production d'élève pour le premier énoncé (d'après une brochure INRP)

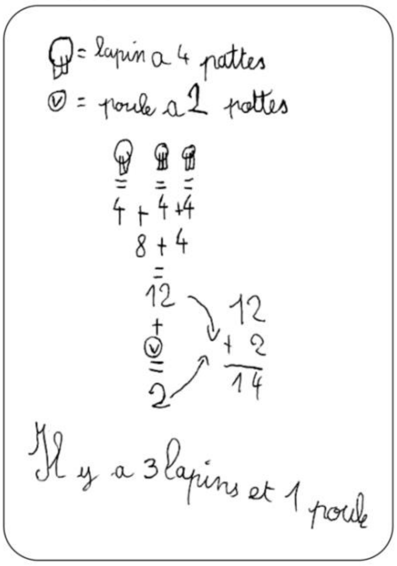


On trouve ce type de problème au CRPE 2007 : « Arnaud est allé voir les poules et les lapins de son voisin. En revenant, il pose à son frère la devinette suivante : « J'ai compté les têtes de tous les animaux et j'ai trouvé 4. J'ai ensuite compté les pattes et j'ai trouvé 14. Peux-tu me dire combien il y a d'animaux de chaque sorte ? »

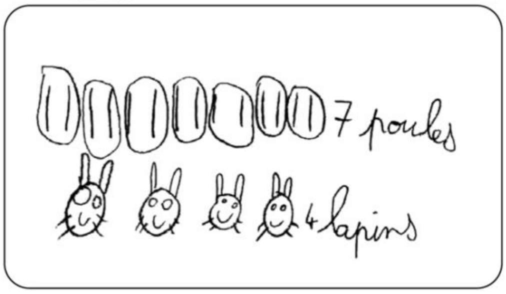
élève B



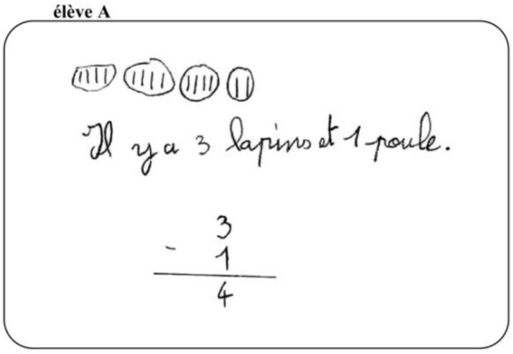
élève C



élève D



élève A



Compte-rendu d'expérimentation

Déroulement	Commentaires

4. Problème A4 : Bateau (à partir du CE2)[6]

Des groupes arrivent pour une promenade en bateau. Voici le nombre de personnes par groupe : 25, 50, 65, 70, 85, 100, 45. Les personnes d'un même groupe ne veulent pas se séparer : elles veulent monter dans le même bateau.
Un bateau transporte 150 personnes, pas une de plus. Il y a 3 bateaux. On voudrait savoir comment ces groupes vont s'organiser pour monter dans les bateaux.

Analyse a priori

Mathématiquement

Ce problème est du type problème à contraintes, ou problème où il faut déterminer parmi tous les cas possibles les cas qui pourraient être solutions. Il n'y a pas de modèle mathématique « de référence » pour lequel on dispose d'une technique experte (comme dans les problèmes ci-dessus où le modèle était celui d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues ou d'une équation diophantienne). Le problème admet deux solutions.

Objectifs

- un problème peut avoir plusieurs solutions ;

Gérer des essais, tirer parti des essais pour rectifier ;

- Vérifier en revenant à l'énoncé ;
- Anticiper s'il y a une solution éventuelle (en calculant le nombre total de passagers et la capacité des trois bateaux) ;
- Anticiper en s'appuyant sur les ordres de grandeurs ;
- Exercer des compétences en calcul mental (version sans calculatrice).

[6] ERMEL. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CE2*. p.57. Hatier

Type de problème : problème pour apprendre à chercher.

Matériel

Matériel à donner soit au début, soit après la première mise en commun intermédiaire : des cartes pour chaque groupe avec le nombre de membres du groupe, éventuellement une feuille avec une représentation schématique de trois bateaux.

Techniques de résolution

Exemples de procédures :
Démarrage des procédures : après plusieurs essais infructueux, anticipation d'une solution éventuelle par calcul du nombre total de passagers : 440 ; capacité des bateaux : 450 ; donc tous les passagers pourront monter si on enlève la contrainte des groupes non disjoints, il y aura en fait peu de places libres.
Procédure 1 : poursuite en prenant en compte cette information : on a alors intérêt pour chaque groupe de grand effectif (celui de 100 et de 85) à compléter par des groupes de telle sorte qu'on soit le plus proche de 150.
Pour le groupe de 100 : il reste 50 places, on essaie de compléter soit avec celui de 50, soit avec celui de 45.
Pour le groupe de 85 : il reste 65 places, on doit compléter avec celui de 65 (celui de 70 : c'est trop, celui de 50, il reste 15 places que l'on ne peut pas compléter par un autre groupe).
On a déjà deux ébauches de répartition :
Première répartition : Bateau A : 100 + 45 ; bateau B : 85 + 65, on barre dans la liste les groupes déjà placés ; reste les groupes de 25, 50, 70 : cela rentre dans le troisième bateau.
Deuxième répartition : Bateau A : 100 + 50 ; bateau B : 85 + 65 ; reste les groupes de 25, 45, 70 ; cela rentre dans le troisième bateau.
Procédure 2 : en s'aidant d'un tableau à double entrée avec les totaux de regroupement de deux groupes (cela nous semble peu plausible)

	Groupe de 25	Groupe de 45	Groupe de 50	Groupe de 65	Groupe de 70	Groupe de 85	Groupe de 100
Groupe de 25	X	70 reste 80 (possible compléter avec 70 ou 45 ou 65)	75 reste 75 (possible compléter avec 70 ou 45 ou 65)	90 reste 60 (possible compléter avec 50 ou 45)	95 reste 55 (possible compléter avec 50 ou 45)	110 reste 40 (impossible de compléter)	125 reste 25 (impossible de compléter)
Groupe de 45		X	95 (faire pareil que ci-dessus)	110	115	130	145
Groupe de 50			X	115	120	135	150
Groupe de 65				X	135	150	165
Groupe de70					X	155	170
Groupe de 85						X	185

Groupe de 100							X

Descriptif, mise en œuvre

Dévolution du problème

On peut mimer l'énoncé avec des « patates » représentant les bateaux, des étiquettes « nombre de places » des bateaux, des cartes « nombre de personnes par groupe ».

Une vidéo pour présenter l'énoncé, tournée lors de la semaine des mathématiques 2015, sera mise à disposition ultérieurement sur le site de l'IRES.

Phase 1 : recherche individuelle

Phase 2 : échange par binôme

Le rôle du professeur est d'inciter à vérifier si toutes les contraintes sont vérifiées, en particulier si tous les groupes sont sur un bateau, que les groupes ne sont pas disjoints.
Phase 3 : mise en commun intermédiaire
On commence par une équipe ayant utilisé deux fois un même groupe ; on met en évidence qu'il faut barrer au crayon les nombres des groupes ayant déjà servi ; le matériel peut alors être distribué si cela n'a pas été le cas avant. Puis une équipe ayant rempli deux bateaux avec peu de places libres mais n'aboutissant pas pour le troisième bateau. On met en commun les stratégies de recherche.
Si aucun binôme n'a trouvé l'une des solutions, le professeur relance la recherche en s'appuyant sur l'idée qu'il faut d'abord répartir les groupes avec un grand nombre de membres et compléter en étant proche de 150.
Si plusieurs binômes ont trouvé l'une des solutions, on relance la recherche pour ceux-là en indiquant qu'un autre binôme a trouvé une autre répartition, de façon à laisser un nouveau temps de recherche aux binômes n'ayant pas trouvé de solution.

Phase 4 : nouvelle recherche

Phase 5 : mise en commun, validation, institutionnalisation

La validation des solutions s'effectue par vérification du respect des contraintes.

Différenciation, aides

Autoriser la calculatrice pour les groupes en difficulté en calcul mental ; aider en proposant de rayer les effectifs de groupes déjà placés ; pour les plus rapides ayant trouvé une solution correcte, leur faire chercher la deuxième.

Institutionnalisation :

Pour résoudre un problème, il est utile de :

- S'organiser quand il y a beaucoup d'informations ; noter les informations : ici 3 bateaux (on peut effectuer un dessin schématique pour chaque bateau), la liste des effectifs des groupes, rayer au fur et à mesure lorsqu'on a placé un groupe ou bien se construire des cartes avec le nombre ;
- Relire l'énoncé fréquemment pour voir si on a pris en compte toutes les informations ;
- Essayer d'anticiper s'il y a une solution éventuelle ; ici en calculant l'effectif total et la capacité des bateaux ;

- Essayer de réduire le nombre d’essais à faire : ici une stratégie était de regarder comment compléter les groupes de 100 et 85 de façon à ce qu’il y ait peu de places libres.
- Complément possible (si cela n’a pas encore été fait) : en mathématiques un problème peut avoir plusieurs solutions.

Compte-rendu d’expérimentation

Déroulement	Commentaires