Résolution de problèmes : énoncés de problème « recherche des cas possibles »

Problèmes issus du projet de brochure sur la résolution de problèmes du groupe « école primaire »

Table des matières

Nous emploierons dans ce document le féminin pour « la professeure » à titre épicène.

1. Problème B1 Problème des maisons (MS, GS, CP)

Origine : Odette Bassis « Concepts clés et situations problèmes en mathématiques » tome 2 ; Éd. Hachette éducation p. 13-21

Énoncé

La professeure demande de confectionner des maisons avec des triangles et des carrés de trois couleurs différentes.

Analyse a priori

Mathématiquement

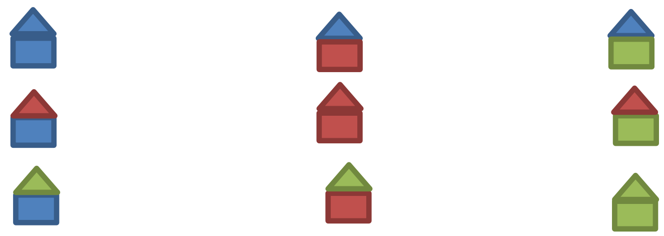
Il s'agit de trouver tous les couples que l'on peut former, le premier élément étant dans un ensemble A et le second élément étant dans un ensemble B différent du premier. C'est la recherche du produit cartésien des ensembles A et B.

Technique de résolution

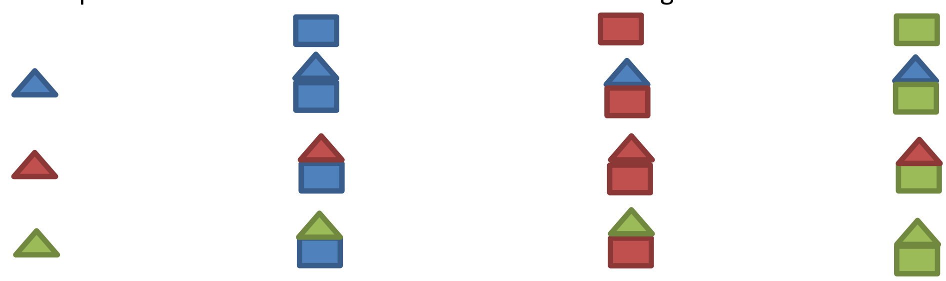
Pour cela, il suffit de choisir un élément de la première collection et de lui associer chacun des éléments de la seconde puis de procéder de même pour chacun des éléments de la première collection. On peut par exemple représenter la technique à l'aide d'un arbre ou un tableau à double entrée.

Descriptif, mise en œuvre

1) *Première étape : consigne très ouverte : « construisez des maisons »*
Chaque enfant fait des propositions qui sont étalées au centre du groupe pour observation. Les propositions des élèves seront sûrement très variées, avec des maisons unicolores, toujours bicolores, etc.
Mise en commun : la mise en commun devrait permettre de faire émerger la multiplicité des propositions.
2) *Deuxième étape : on introduit une contrainte formulée par la maîtresse sous la forme : « construisez des maisons pas pareilles ».*
Pendant la phase de recherche la professeure pose des questions à chaque élève « est-ce que cette maison est pareille que celle-ci ? » Ceci afin de préparer les formulations des élèves pour la phase de mise en commun, par exemple l'élève pourra dire : « c'est pas pareil car le toit ici est rouge et là bleu » ou « c'est pareil car le toit et les murs sont de la même couleur ».
À la fin de la séance, même processus d'observation / échanges.
3) *Troisième étape : demande d'exhaustion : la maîtresse demande des « maisons pas pareilles » et ajoute qu'il en faut « le plus possible ».*
À la fin, on dépose toutes les maisons des élèves de l'atelier sur une planche.
4) *Quatrième étape : émergence du besoin d'une organisation pour être sûr d'avoir toutes les maisons possibles*
La professeure demande : « a-t-on toutes les maisons possibles sur la planche ? Comment peut-on s'organiser ? » Une proposition des élèves ou à défaut une suggestion du professeur pour faire avancer la recherche de tous les cas possibles est : « on cherche toutes les maisons à toit bleu ». Des organisations peuvent être proposées par les élèves. La professeure repartira des propositions pour arriver à une organisation en lignes (chemin des toits bleus par exemple), puis en ligne et colonne avec d'une part la couleur du toit, d'autre part la couleur des murs.



La professeure peut introduire les têtes de colonne et têtes de ligne dans un second temps



Puis recherche des maisons manquantes à l'aide du tableau.
On peut ainsi introduire le tableau à double entrée comme un nouvel outil qui est la réponse à un problème de recherche de tous les cas possibles.
Après cette phase de découverte-construction, on joue, par exemple avec des caches. On cache une maison, on cache une entrée, etc. Il s'agit de retrouver les critères permettant de définir ce qui est caché. La lecture du tableau à double entrée est engagée et on peut convenir avec les enfants des termes de lignes et de colonnes.
Un exemple de mise en œuvre d'un travail sur le tableau à double entrée avec des caches : M.Hersant et Y.Thomas *Mathématiques à grands pas GS*, éd. Retz 2018 (un extrait comprenant cette activité est consultable en ligne sur le site des éditions Retz).

Institutionnalisation :

« Pour trouver toutes les maisons possibles et ne pas en oublier, on doit organiser sa recherche : par exemple d'abord on cherche toutes les maisons à toit bleu, puis toutes les maisons à toit rouge ».

2. Problème B2 Habillage des poupées (MS-GS-CP)

Énoncé

Problème : Trouver toutes les façons d'habiller une poupée avec des jupes différentes et des pulls différents.

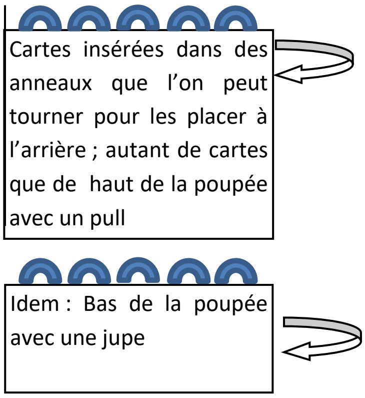
En MS, on propose 2 à 3 jupes et 2 à 4 pulls, avec un nombre différent de jupes et de pulls, on pourra différencier suivant les élèves par le choix des valeurs numériques.
En GS-CP, on pourra proposer l'énoncé deux fois dans l'année, une première fois avec des petites valeurs numériques, une seconde fois avec des valeurs plus grandes.
Matériel : pour des élèves de maternelle, on proposera des poupées et deux ou trois modèles différents pour la jupe et pour le pull ; en CP, ce même matériel pourra être utilisé uniquement dans la phase de présentation de la situation.
Le matériel peut évoluer de poupées réelles avec des habits réels à des dessins de poupées à colorier, en passant par des représentations de demi-poupées ou de pulls et jupes à replacer sur des canevas de poupées.

Analyse a priori

Il s'agit en fait du même problème que celui des maisons mais avec un contexte différent. On ne redonne pas l'analyse.
Nous proposons un autre outil que le tableau à double entrée.

Aides et questions cruciales

On peut utiliser une aide composée d'un méli-mélo divisé en 2 parties qui permet d'afficher toutes les solutions, une seule étant visible à la fois. Cette aide vise à faire évoluer la procédure des élèves vers une procédure du type : pour chaque couleur de pull on construit les 4 possibilités avec des jupes différentes.



Étapes pour faire évoluer la stratégie

Pour l'exhaustivité des solutions avec 4 jupes différentes et 3 pulls différents l'évolution de la stratégie de recherche attendue est :

- tâtonnement perceptif pour trouver plusieurs poupées (habillage des poupées) ;
- recherche de doublons dans les solutions trouvées (on retire les poupées identiques)
- organisation et complément des solutions : « pour chaque couleur de pull on construit les 4 possibilités avec des jupes différentes. » (12 solutions).

La méthode experte d'organisation des solutions, qui permet de les trouver toutes est la construction d'un tableau à double entrée ou d'un arbre. Les élèves de maternelle ne le feront pas spontanément. Pour le tableau à double entrée, l'enseignant peut, dès que les élèves ont proposé des organisations spatiales relativement proches, institutionnaliser ce type de tableau comme moyen de résoudre un problème d'exhaustivité (trouver tous les éléments d'un ensemble définis par deux propriétés).

Mise en œuvre

La mise en œuvre peut être proposée en 3 étapes (comme dans la situation des maisons) : habiller les poupées – habiller les poupées de façons différentes – trouver le plus possible de façons différentes d'habiller les poupées ; la mise en commun finale comportera la question : « a-t-on trouvé toutes les façons d'habiller les poupées ? »

Institutionnalisation

Pour résoudre ce problème on a d'abord fixé la couleur d'une jupe pour ne travailler qu'avec les pulls. On peut s'organiser pour ne pas en oublier avec un tableau.

3. Problème B3 Les tours Ermel (CP-CE1)

Énoncé

« Trouver un maximum de tours différentes de quatre étages que l'on peut former en utilisant quatre couleurs différentes une seule fois »

Analyse a priori

Mathématiquement

Il s'agit là de dénombrer les permutations d'un ensemble à quatre éléments, c'est-à-dire le nombre de quadruplets, chaque élément du quadruplet étant distinct des autres éléments. Le nombre de solutions est donné par le calcul $4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Techniques

- tâtonnement perceptif pour trouver plusieurs tours ;
- recherche d'un problème simplifié ;
- essais organisés : en fixant le premier étage d'une couleur, puis la couleur du second étage et en cherchant toutes les solutions une fois ces deux couleurs fixées ; puis en changeant la couleur du second étage ; puis celle du premier ;
- détermination du nombre de possibilités pour le premier étage (4 choix), puis en multipliant par le nombre de choix du second (plus que 3 possibilités puisqu'une couleur est déjà utilisée), puis du troisième, pour le quatrième il n'y a plus de choix possible.

Étapes pour faire évoluer la stratégie

- recherche libre ;
- recherche de doublons dans les solutions trouvées (on retire les tours identiques) ;
- trouver le plus possible de tours différentes ;
- organisation et complément des solutions.

Aides

L'aide de l'enseignant peut porter sur le choix d'une couleur pour le premier étage, puis en organisant la recherche en groupe pour lesquels la couleur du premier étage est fixée, et différente pour chacun d'entre eux. La technique consiste en un problème simplifié par réduction du nombre d'élément du n −uplet : il s'agit alors de trouver un maximum de tours différentes de trois étages que l'on peut former en utilisant trois couleurs différentes une seule fois. Une idée serait d'affecter à deux groupes distincts la même couleur pour le premier étage.

Mise en commun

Dans la mise en commun il est important de faire émerger que quelle que soit la couleur du premier étage, le nombre de tours que l'on a pu construire est de 6 (3×2). On peut donc en construire 6 pour chaque couleur de premier étage et comme il y a quatre couleurs possibles pour le premier étage, on peut finir de résoudre le problème.

Institutionnalisation

Pour résoudre ce problème on a d'abord fixé la couleur du premier étage pour ne travailler qu'avec 3 couleurs.

4. Problème B4 Problème des menus (CM1-CM2)

Adapté du livre de D.Butlen « Le calcul mental entre sens et technique » éd. Presses universitaires de Franche-Comté 2007, p. 111 à 117)

Énoncé

Déterminer le nombre de menus différents avec un choix de ....entrée, ...plat principal, ...dessert

Modèle mathématique

Calculer le cardinal du produit cartésien de trois ensembles A, B et C.

Variables didactiques

La taille du cardinal des ensembles A, B et C est une variable didactique, ainsi que le nombre d'ensembles.

Deux domaines numériques pour le cardinal de chaque ensemble : D_1 (entre 0 et 5), D_2 (entre 6 et 30). Pour le problème initial, on propose de choisir les trois cardinaux dans D_2.

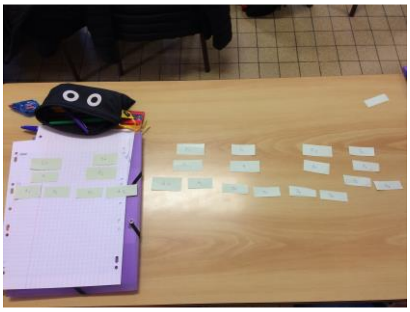
Énoncé choisi :

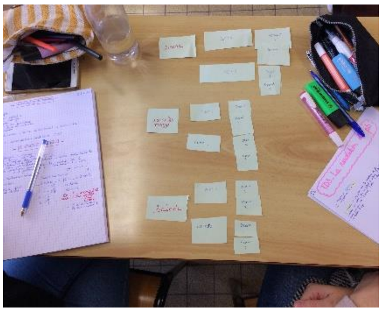
Au restaurant, un menu est composé d'une entrée choisie parmi 12 entrées, un plat choisi parmi 6 et un dessert choisi parmi 7 desserts. Combien de menus peut-on constituer ?

Matériel éventuel

On pourra avoir préparé des étiquettes en grand nombre permettant de « construire » des menus possibles :

E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3
E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3
…														
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	
…														
D1	D2	D3	D4	D5	D6	D1	D2	D3	D4	D5	D6			
D1	D2	D3	D4	D5	D6	D1	D2	D3	D4	D5	D6			
D1	D2	D3	D4	D5	D6	D1	D2	D3	D4	D5	D6			
…														





Analyse a priori

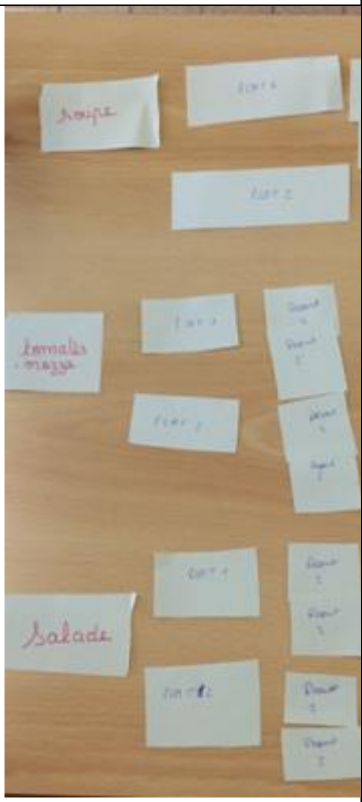
Analyse mathématique du problème :

La recherche de **tous** les menus possibles revient ici à calculer le cardinal du produit cartésien de trois ensembles A, B et C.

Techniques, difficultés prévisibles

Analyse proposée dans le cas d'un problème réduit 3 entrées, 2 plats, 2 desserts et pour lequel on dispose du matériel (avec plusieurs choix sur le matériel).

	Matériel	Description de la technique	Difficultés prévisibles
T1	Grand nombre d'étiquettes :(E1,P1,D1) ; (E1,P1,D2),.. Possibilité 1 : en donnant plus d'étiquettes que de besoin pour constituer tous les menus possibles. Possibilité 2 : si on donne le nombre exact d'étiquettes nécessaires 12 de chaque dans notre cas ; la situation devient auto-validante au contrôle de la redondance près.	**T1a.** classement des étiquettes en Entrée Plat, Dessert. Choix successifs dans chacune des classes d'une étiquette E, P et D ; organisation des triplets d'étiquettes en veillant à ne pas reproduire un menu déjà constitué par comparaison successive. **T1b.** Choix de toutes les étiquettes E1 puis à chaque étiquette on associe P1 pour l'une P2 pour l'autre et on réitère l'action avec les étiquettes dessert. Ce qui nécessite de construire à nouveau des couples (E1 ; P1) pour pouvoir leur associer les desserts possibles.	La liste devient vite très longue et nécessite une bonne organisation de l'énumération des menus possibles de façon à être exhaustif et non redondant.

	Matériel	Description de la technique	Difficultés prévisibles
T2	 On propose des étiquettes pour les entrées, les élèves doivent construire les autres.	On choisit une étiquette entrée puis, à chacun de ces choix, on fait correspondre les étiquettes possibles pour les plats et enfin celles pour les desserts. Même si on ne dispose que d'un nombre limité d'étiquettes, on peut constituer tous les menus possibles au prix d'une organisation de l'énumération : celle sous forme d'arbre. Dans le cas d'une seconde phase en réduisant à deux le nombre d'ensembles (entrée-plat ou plat-dessert), une disposition spatiale sous forme de tableau à double entrée est aussi possible et est une organisation alternative permettant aussi le dénombrement.	Difficulté à garder trace des menus (sous forme de liste) que l'on a pu constituer au fil de l'organisation des étiquettes ou difficulté à dégager une structure permettant le dénombrement.
T3	Pas de matériel	Elle correspond à la technique 2 sans matériel en utilisant la multiplication. Il y a trois entrées possibles et à chaque entrée correspondent deux plats possibles, soit 3×2 couples (E ; P) possibles. Puis à chacun de ces couples on peut associer trois desserts ce qui conduit à $(3 \times 2) \times 3$ menus possibles.	Associer à ce problème de menus, le modèle multiplicatif (de produit cartésien).

T1 et T2 sont conceptuellement moins difficiles à appréhender et engagent l'élève dans l'action.
Par contre elles sont beaucoup plus coûteuses (constitution des étiquettes, organisation, dénombrement).

Compétences travaillées

T1 et T2 :
S'engager dans une recherche par tâtonnements
Organiser ses recherches pour viser l'exhaustivité
Dénombrer les éléments d'un ensemble
T3 : reconnaître un problème relevant du champ multiplicatif
Calculer le produit de trois nombres

Aides

A1 : le problème étant posé, la professeure peut encourager les élèves à recourir à une simulation de construction de menus :

- En fournissant des étiquettes ;
- En demandant aux élèves de les constituer.

A2 : le problème se révélant complexe, la professeure peut proposer de :

- Changer la formule : E-P ou P-D par exemple ou fixer l'entrée ;
- Réduire le nombre de choix par catégorie.

Validation

La validation du modèle (problème multiplicatif) peut se faire sur un problème simplifié. Sur celui-ci le recours aux techniques T1 et T2 permet de vérifier que le calcul (produit des trois cardinaux) donne le résultat du dénombrement de l'ensemble des menus possibles.

Institutionnalisation prévue

Pour résoudre ce problème :
- On peut commencer à représenter les menus avec des étiquettes mais comme c'est long, on peut :
- réduire la taille des nombres pour pouvoir construire les menus, dessiner, représenter… et comprendre comment construire le modèle pour résoudre le problème de départ.
- On peut fixer un des plats (par exemple l'entrée) pour ne travailler qu'avec le plat de résistance et le dessert (traiter un sous problème).
- On peut aussi fixer un plat ET réduire la taille des nombres.

Mise en œuvre

Dans son ouvrage, D. Butlen propose : pour qu'une familiarisation avec ce type de problème (calculer le cardinal du produit cartésien de trois ensembles A, B et C) ne se limite pas à une recherche exhaustive de toutes les solutions (qui dans le domaine D_2 conduira à un échec), il est nécessaire d'adopter une progression qui permette de surmonter les difficultés liées à la structure du problème d'une part et à la taille des nombres d'autre part, à savoir :

- problème complexe avec le produit cartésien de trois ensembles de cardinaux assez grands,
- simplification éventuelle de structure avec le passage de trois à deux ensembles (recherche d'un produit partiel),
- simplification éventuelle portant sur la taille des nombres en donnant trois ensembles de cardinaux petits,
- retour au problème initial.

Rappel de l'énoncé du problème complexe choisi : « une entrée au choix parmi 12 /un plat au choix parmi 6 / Un dessert au choix parmi 7 »

Phase 1 : recherche individuelle, en cas de difficulté la professeure suggère de construire les menus à l'aide d'étiquettes.
Phase 2 : après un bilan des productions, pour relancer l'étude, la professeure propose un problème simplifié :

- Ou bien en fixant l'entrée : « *combien de menus peut-on constituer avec l'entrée carotte* ? », ce qui équivaut à chercher combien de menus on peut constituer en prenant uniquement deux ensembles (sur l'exemple celui des plats et desserts) : « *combien de menus peut-on constituer avec 6 plats et 7 desserts uniquement ? ».*
- Ou bien en réduisant le champ numérique *:* « *combien de menus peut-on constituer avec 3 entrées, 2 plats et 2 desserts uniquement ? »*
- Ou bien en combinant les deux, réduction du nombre d'ensemble et du champ numérique : « combien de menus peut-on constituer avec 3 entrées, 2 plats uniquement ? »

Phase 3 : le problème initial fait l'objet d'une nouvelle recherche, avec appui sur les élèves qui en ont produit une bonne représentation pour amener la classe à comprendre les démarches qui permettent de trouver le résultat du problème initial à partir du résultat du problème simplifié.

5. Problème B5 Le problème des cornets de glace (CE2-CM1-CM2)

Énoncé

Gelati, l'Italien, vend trois parfums de glace au choix : fraise, chocolat, pistache.
Sarah lui demande un cornet avec 4 boules.
Quelles sont toutes les combinaisons possibles de cornets à 4 boules que Sarah peut commander ?

Analyse a priori

Modèle mathématique

Dans ce problème le nombre de la « partie » à construire, ici les 4 boules (on emploie le mot « partie », ce n'est pas un ensemble mathématique car on répète des éléments), est supérieur au cardinal de l'ensemble dans lequel on prend les éléments (ici les 3 parfums). Cela sera donc des combinaisons avec répétitions d'un point de vue mathématique.
Il existe une technique permettant de déterminer le cardinal des combinaisons avec répétitions, mais contrairement à celle de détermination du nombre de permutations du problème des menus, elle n'est pas accessible, même au niveau lycée (ou alors en problème guidé en terminale option « mathématiques expertes », on la trouve dans d'anciens manuels de Terminale C).

Techniques

S'organiser en faisant une disjonction de cas sur le nombre de boules de parfums identiques par cornet, et par cas, en dénombrant des choix.
Pistache : p ; fraise : f ; chocolat : c

- Toutes les boules du même parfum : 3 cornets : pppp ; ffff ; cccc
- 2 parfums différents :
  - une boule de l'un (3 choix) et 3 boules de l'un des deux autres parfums (deux choix) : soit 6 cornets : pppf, pppc, fffp, fffc, cccp, cccf
  - deux boules d'un parfum et deux boules d'un autre parfum : ppff, ppcc, ffcc
    Mathématiquement (accessible pour certains élèves) : 3 choix pour le premier parfum et 2 choix pour le second, en faisant cela on les compte deux fois car on les compte avec un ordre, le premier parfum et le second : soit 6/2 cornets = 3 cornets.

- 3 parfums différents : ppfc, ffpc, ccfp

Mathématiquement : comme il y a 4 boules, seul un parfum sera présent sur deux boules distinctes ; on choisit donc le parfum qui est répété (3 choix) et ensuite on n'a plus le choix, ce sont les deux autres parfums.

Au total : 3 + 6 + 3 + 3 = 15.

Comme dans le problème des menus, une stratégie est de réduire le champ numérique. Nous proposons comme réduction trois boules avec deux parfums. Il est cependant important de proposer le problème complexe dans un premier temps de façon à enseigner cette stratégie de réduction du champ numérique qui n'apparaitrait pas en proposant d'abord le problème simplifié.

Mise en œuvre

Phase 1 : recherche du problème complexe

Aide éventuelle en donnant un grand nombre de jetons de trois couleurs représentant les boules de glace ; mise en commun en faisant apparaître qu'il y a des cornets à un seul parfum, d'autres à deux parfums, d'autres à trois parfums.

Phase 2 : proposition de réduction du nombre de boules et du nombre de parfums ; nouvelle recherche et mise en commun

Phase 3 : retour au problème initial

Institutionnalisation

Pour résoudre ce problème il faut s'organiser : chercher d'abord tous les cornets dont toutes les boules ont un seul parfum, les cornets ayant des boules de deux parfums, les cornets ayant des boules de trois parfums.

Pour s'aider on peut commencer par résoudre le problème avec moins de boules et moins de parfums.